UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

# Funzioni $L$ $p$-adiche in due variabili per il quadrato simmetrico

**Giovanni Rosso**

Relatori

**Prof. Jacques Tilouine**
**Prof. Marco Andrea Garuti**

Anno Accademico 2009–2010

Ai miei genitori e a mia nonna.

Non posso che ringraziare la mia famiglia, che mi ha accompagnato e spesso sostenuto non solo negli studi, ma anche nella vita, regalandomi preziosi ricordi e grandi insegnamenti.

Ringrazio tutti i miei amici di Vercelli, che conosco da sempre o che ho conosciuto da poco, perchè mi hanno dato ben più che compagnia e divertimento nel mio tempo libero.

Ringrazio tutti i miei amici di Torino, con cui ho condiviso l'emozione della scoperta del mondo della matematica, e con cui divido ancora, nonostante la distanza, i problemi di tutti i giorni e le aspettative per il futuro.

Ringrazio tutti i miei compagni di questi due anni ALGANT, che in questi due anni hanno fantasticamente compensato la lontananza da casa, facendomi sempre sentire a mio agio ovunque mi trovassi.

Et je remercie l'ALGANT pour les opportunités qui m'a donné, les professeurs de Paris et Padue qui m'ont appris vraiment beaucoup et mon directeur Tilouine qui m'a introduit à l'interpolation $p$-adique et à la théorie d'Iwasawa.

# Table des matières

# Chapitre 0

# Introduction

Ce mémoire comprend trois partis : dans la première on introduit les formes modulaires ordinaires et l'algèbre de Hecke ordinaire de Hida, puis on donne une brève introduction à la théorie de la mesure $p$-adique et on termine avec la fonction $L$ $p$-adique qui interpole les valeurs critiques des fonctions $L$ de la représentation au carré symétrique d'une famille de formes modulaires ordinaires.

Après des rappels sur les formes modulaires classiques, leur algèbre de Hecke et les fonctions $L$ associées, on introduit les formes modulaires $p$-adiques et l'algèbre de Hecke correspondante, dans laquelle on peut définir un idempotent $e$. On peut donc définir l'espace des formes ordinaires comme le sous-espace de l'espace de les formes modulaires $p$-adiques qui n'est pas annulé par $e$. On se concentre donc sur l'algèbre de Hecke de niveau $Np$ ordinaire $\mathscr{h} = \mathscr{h}^{ord}(\Gamma_1(Np), \mathcal{O}_K)$, c'est à dire la sous-algèbre de l'algèbre de Hecke $p$-adique où $e$ est une unité. On démontre d'abord des théorèmes de structure pour $\mathscr{h}$ : c'est un module libre de rang fini sur l'algèbre d'Iwasawa de $\mathcal{O}_K$ $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[X]]$, son quotient par les polynômes $P_{\varepsilon,n}(X) = 1 + X - \varepsilon(1+p)(1+p)^k$ donne presque toujours l'algèbre de Hecke classique de poids $k$ et nebentypus $\varepsilon$ pour un certain sous-groupe de congruence et il y a une sous-algèbre libre sur $\Lambda_K$ qui correspond a les opérateurs qui annulent les formes modulaires $p$-adique vieilles.
On peut donc associer, par dualité, à chaque composante irréductible $\mathcal{I}$ de $\mathscr{h}^{ord}(\Gamma_1(Np), \mathcal{O}_K)$ une famille de formes modulaires classiques, qui est paramétrée par les $\overline{\mathbb{Q}}_P$-points arithmétiques (i.e. qui restreints sur $\Lambda_K$ sont $P_{\varepsilon,n}(X)$) de $\mathcal{I}$.

On définit donc pour tout composante irréductible $\mathcal{I}$ le module de congruences de $\mathcal{I}$ comme l'annulateur du quotient de la clôture libre de projection de $\mathscr{h}$ dans $\mathscr{h} \otimes_{\Lambda_K} \mathcal{L}_K$ par l'algèbre ordinaire, pour $\mathcal{L}_K$ le corps des fractions de $\Lambda_K$. Ce module mesure, avec le changement du poids, à une petit erreur près, combien de formes modulaires ordinaires congruentes à les formes associées à $\mathcal{I}$ modulo l'idéal maximal de l'anneau des entiers $p$-adiques existent. On donne de condition afin que l'erreur soit nulle.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les concepts de mesure $p$-adique sur un espace $p$-adique et on démontre que pour espaces comme $\mathbb{Z}_p$ ou $\Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p$ les mesures à valeurs dans $\mathcal{O}_K$ s'identifient avec $\mathcal{O}_K[[X]]$. Comme il est bien connu qu'on peut écrire certaines valeurs de la fonction $\zeta$ de Riemann ou des

fonctions $L$ de Dirichlet en fonction de dérivées de fonctions rationnelles, il est naturel de définir de mesures sur $Z_p^\times$ qui, intégrées sur $x^m$, donnent les valeurs en $-m$ des fonctions qui nous intéressent. En voyant une mesure comme une série formelle $F(T)$, c'est immédiat de définir une fonction $L$ $p$-adique (en substituant $(1+p)^s-1$ à T) qui interpole donc la fonction $L$ classique et analytique presque partout.
On présente ensuite une interprétation cohomologique des formes modulaires, qui nous permettra de donner, en mimant la formulation intégrale de la fonction $L$ d'une forme propre, sous l'hypothèse d'ordinarité, une fonction $L$ $p$-adique qui interpole la fonction $L$ complexe.

Dans la troisième partie on veut construire une fonction $L$ $p$-adique en deux variable pour la fonction $L$ complexe associé à le carré symétrique de la représentation automorphe associé à une forme modulaire. Pour faire cela, on introduit d'abord quelques concepts nouveaux : forme modulaires de poids demi-entier et quasi-holomorphes, opérateur différentiel de Mass-Shimura, mesure arithmétiques, généralise et d'Eisenstein. En particulier, on s'intéresse aux mesures qui ont valeurs dans les formes modulaires $p$-adiques de poids demi-entier.
On prend alors une composante irréductible $\mathcal{I}$ de l'algèbre de Hecke ordinaire, qui est associé à une famille de formes modulaires ordinaires, un élément $H$ de $\mathcal{I}$ non nul qui annule le module de congruences de $\mathcal{I}$ et une mesure $\mu$ sur un espace $T$. On démontre qu'il existe une famille de mesures $\Phi_P$ sur $T$ qui, intégrées sur une fonction $\phi$, interpolent le produit de Rankin entre $f_P$ et $\mu(\phi)$.
Pour interpoler la fonction $L$ qui nous intéresse, on interpole d'abord une fonction $L$ imprimitive qui diffère de l'autre fonction $L$ seulement par un nombre fini de facteurs d'Euler. En fait, Shimura a démontré qu'on peut écrire cette fonction imprimitive comme un produit de Rankin entre $f_P$ et un série thêta et donc on applique le théorème d'abord à une mesure thêta adéquate. On termine en ajoutant les facteurs ($p$-adiques) qui manquent et en vérifiant que la fonction $L$ qu'on a obtenu est, souvent, dans $H^{-1}\Lambda_K\widehat{\otimes}\mathcal{I}$.

# Chapitre 1

# Formes modulaires et algèbres de Hecke

Dans ce chapitre, on donnera des rappels sur les formes modulaires et leurs algèbres de Hecke, puis on introduira les formes modulaires $p$-adiques et la projection sur la partie ordinaire.

## 1.1 Définitions et notations

Soit $\mathfrak{H}$ le demi-plan de Poincaré des nombres complexes de partie imaginaire positive. On a l'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{H}$ donné par $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pour une fonction holomorphe $f$ sur $\mathfrak{H}$, une matrice $\gamma$ dans $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ et un entier $k$, on pose

$$(f|_k\gamma)(z) = \det(\gamma)^{k-1} f(\gamma(z))(cz+d)^{-k}.$$

Parfois, la puissance de $\det(\gamma)$ dans cette formule est $k/2$ au lieu de $k-1$, mais dans ce chapitre cela sera pour nous la formulation la plus commode. Souvent, on appelle le facteur $(cz+d)$ facteur d'automorphie et on le désigne par $j(\gamma, z)$ ; on voit tôt que $j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma' z) j(\gamma', z)$.
Maintenant, on concentre notre attention sur les sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et on définit

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &= \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N \right\} \\
\Gamma_1(N) &= \left\{ \gamma \in \Gamma_0(N) \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\} \\
\Gamma(N) &= \left\{ \gamma \in \Gamma_1(N) \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}
\end{aligned}$$

On peut voir que $\Gamma_1(N)$ est distingué dans $\Gamma_0(N)$ (il est le noyau de la projection sur $d$) et $\Gamma(N)$ est distingué dans tous les deux (il est le noyau de la réduction modulo $N$ du $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$). On dit que $\Delta$, sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, est un sous-groupe de congruence s'il existe $N$ tel que $\Delta \supset \Gamma(N)$. En raison du fait

que $\Gamma(N)$ est le noyau de la reduction modulo $N$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, on a que tout les sous-groupes de congruence sont d'indice fini dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et entre eux (c'est-à-dire que pour $\Delta$ et $\Delta'$, $\Delta \cap \Delta'$ est d'indice fini dans $\Delta$ et $\Delta'$). Ces groupes agissent discrètement sur $\mathcal{H}$ et on dénote par $Y(\Delta)$ la surface de Riemann quotient correspondante. Cette surface n'est jamais compacte. Donc, on considère la compactification $\overline{\mathfrak{H}} := \mathfrak{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de $\mathfrak{H}$ ; en définissant l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de la façon suivante $\gamma \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$, on voit immédiatement, avec l'identité de Bezout, que l'action est transitive. On appelle $X(\Delta) := \Delta \setminus \overline{\mathcal{H}}$ la compactification canonique de $Y(\Delta)$ et les points que l'on a ajouté sont appelés les cusps (ou points) .
Si, étant donné une fonction $f$ holomorphe sur $\mathcal{H}$, on a $f|_k\gamma = f$ pour tout $\gamma$ in $\Gamma(N)$, alors on peut écrire $f$ en série de Fourier $f(z) = \sum_{\mathbb{Z}} a(n/N, f)q^{n/N}$, avec $q = e^{2\pi i z}$. On définit $\mathcal{M}_k(\Delta)$, dit l'espace des formes modulaires de poids $k$, positif, sur $\Delta$, comme l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathfrak{H}$ tels que

$$f|_k\gamma = f \text{ pour tout } \gamma \in \Delta,$$

$$a(n/N, f|_k\gamma) = 0 \text{ pour } n < 0 \text{ et } \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}).$$

La première condition demande que $f$ soit invariante sous l'action de $\Delta$ et la deuxième que $f$ soit holomorphe à l'infini et à les cusps. On peut poser la condition équivalente

$$f \text{ est holomorphe à } \infty \text{ et il exits } r > 0 \text{ et } C > 0 \text{ tels que}$$

$$|a(n,f)| < Cn^r \text{ pour } n > 0.$$

Si on demande en plus

$$a(n/N, f|_k\gamma) = 0 \text{ pour } n \leq 0 \text{ et } \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

on obtient l'espace de formes cuspidales (ou paraboliques) $\mathcal{S}_k(\Delta)$ (les fonctions holomorphes et nulles à les cusps, invariantes par $\Delta$).
Pour chaque caractère $\chi$ d'indice fini de $\Delta$, on définit

$$\mathcal{M}_k(\Delta,\chi) = \{f \in \mathcal{M}_k(\ker(\chi)) \text{ tel que } f|_k\gamma = \chi(\gamma)f \text{ pour tout } \gamma \in \Delta\}$$

En particulier, si $\chi$ est un caractère de Dirichlet modulo $N$, on peut prolonger $\chi$ sur $\Gamma_0(N)$ en définissant $\chi(\gamma) = \chi(d)$ ; le noyau est $\Gamma_1(N)$ et on a le théorème suivant

**Théorème 1.1.1.** *On a une décomposition de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels*

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^*} \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi),$$

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^*} \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi).$$

On définit aussi $\mathcal{E}_k(\Delta) = \mathcal{M}_k(\Delta)/\mathcal{S}_k(\Delta)$ et on l'appelle la partie d'Eisenstien des formes modulaires ; on peut voir que $\mathcal{M}_k(\Delta)$ est la somme directe de $\mathcal{E}_k(\Delta)$ et $\mathcal{S}_k(\Delta)$. Il exist des formules qui permettent de calculer la dimension de ces espaces vectoriels en termes de gendre et des cusps de $X(\Delta)$ [DS05, Theorem 3.5.1, Theorem 3.5.2 et Theorem 3.6.1]. Il est très facile d'étudier la partie d'Eisenstein pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ; en définissant, pour $k>2$

$$E_k^{'}(z)=\sum_{(c,d)\neq(0,0)}\frac{1}{(cz+d)^k}.$$

Il est très facile de voir que $E_k^{'}(z)$ sont des formes modulaires de poids $k$ pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et que, pour $k$ impair, elles sont nulles. Le cas $k=2$ est plus subtil parce que l'on n'a pas de convergence absolue et on définit

$$E_2^{'}(z)=\sum_{c\in\mathbb{Z}}\sum_{d\in\mathbb{Z}_c}\frac{1}{(cz+d)^2}$$

où $\mathbb{Z}_c=\mathbb{Z}$ si $c\neq 0$ et $\mathbb{Z}\setminus 0$ si $c=0$ ; cette fonction n'est pas invariante sous l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, mais on peut la modifier un peu pour qu'elle soit invariante. Mais alors elle n'est plus holomorphe. Ils n'existent pas de formes modulaires de poids 2 pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. De toute façon, pour $k\geq 2$, pair, on a

$$E_k^{'}(z)=2\zeta(k)+2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

avec $\sigma_k(n)=\sum_{d|n}d^k$. En se rappelant que $2\zeta(k)=-\frac{(2\pi i)^k}{k!}B_k$, où $B_k$ est le k-ième nombre de Bernoulli, on a que $E_k(z)=\left(2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\right)^{-1}E_k^{'}(z)$ est rationnel. De plus, $G_k=\zeta(1-k)E_k$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ pour $k=4,6$. On définit $\Delta(z)=(G_4/12)^3(z)-27(G_6/216)^2$ et on peut voir que sa expansion à l'infini est $\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$, donc elle est dans $\mathcal{S}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$.
Maintenant, on veut démontrer que les formes modulaires ont une base définie sur $\mathbb{Z}$. Soit

$$r(k)=\begin{cases}[\text{ k/12 }] & \text{si } k\equiv 2 \bmod 12\\ [\text{ k/12 }]+1 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soient $a$ et $b$ les solutions de $4a+6b=k-12(r(k)-1)$ (il y a une unique couple de solutions positives) et on définit, pour $i=0,\ldots,r(k)-1$,

$$h_i=G_4^aG_6^{b+2(r-1-i)}\Delta^i\in\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})).$$

On observe que $h_i=q^i(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^iq^n)$, donc il sont linéairement indépendant sur $\mathbb{C}$. Si, pour un sous-anneau $A$ de $\mathbb{C}$, on définit

$$\mathcal{M}_k(\Delta;A)=\{f\in\mathcal{M}_k(\Delta):a(n,f)\in A\forall n\},$$

on a le suivant théorème [Hid93, Theorem 5.2.1].

**Théorème 1.1.2.** *On a* $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))=rang_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z})=r(k)$ *pour chaque* $k$. *De plus*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});A)&=\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}A\\ \mathcal{S}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});A)&=\mathcal{S}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}A.\end{aligned}$$

*La famille* $\{h_0,\ldots,h_{r(k)-1}\}$ *est une base pour* $\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z})$ *et* $\{h_1,\ldots,h_{r(k)-1}\}$ *l'est pour* $\mathcal{S}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z})$.

On peut aussi définir les séries d'Eisenstein pour $\Gamma_1(N)$ ; soit $\chi$ un caractère primitif modulo $N$ et, pour $k > 2$

$$E_k^{'}(z,\chi) = \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(\chi(d)(cNz+d)^k}.$$

On peut calculer son expansion à l'infini [Hid93, Proposition 5.1.1]

$$E_k^{'}(z,\chi) = 2L(k,\chi^{-1}) + 2N^{-k}G(\chi^{-1})\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1,\chi}(n)\chi^{-1}(n)q^n$$

où $L(s,\chi) = \sum_{n>0}\frac{\chi(n)}{n^s}$ est la série de Dirichlet associée à $\chi$, la somme de Gauss de $\chi$ est $G(\chi) = \sum_{j=1}^{n}\chi(j)e^{2\pi i\frac{j}{N}}$ et $\sigma_{k,\chi}(n) = \sum_{d|n}\chi(d)d^k$. On appelle $E_k(\chi)$ la normalisation de $E_k^{'}(\chi)$ par $\left(2N^{-k}G(\chi^{-1})\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\right)^{-1}$, qui est donc rationnelle. Si $\chi$ n'est pas primitif, on définit également

$$G_k^{'}(z,\chi) = \sum_{(c,d)\neq(0,0)}\frac{1}{(\chi(c)(cz+d)^k} = 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}*\chi(n)q^n$$

où $\sigma_{k-1}*\chi$ est la convolution de Dirichlet entre $\sigma_{k-1}$ et $\chi$. De la même façon, on peut normaliser $G_k^{'}(z,\chi)$ en $G_k(z,\chi)$ de façon telle qu'elle soit rationnelle. Pour $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$E_k^{'}(z,\chi)|_k\tau = N^{-1}G_k^{'}(z,\chi^{-1}).$$

De plus, si $k > 2$, ou si $\chi$ est non trivial, alors $G_k(z,\chi)$ (et, si $\chi$ est primitif, aussi $E_k(z,\chi)$) sont dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)$ [Hid93, Proposition 5.1.2].

## 1.2 Algèbres de Hecke

Soient deux sous-groupes de congruences $\Gamma$ et $\Gamma'$ et une matrice $\alpha$ dans $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Q})$. D'abord, on définit l'opérateur de double classe $[\Gamma\alpha\Gamma']_k$. On considère $\Gamma\alpha\Gamma' = \{\gamma\alpha\gamma' : \gamma\in\Gamma, \gamma'\in\Gamma'\}$, ensemble sur lequel $\Gamma$ agit par multiplication à gauche et on décompose $\Gamma\alpha\Gamma'$ en orbites $\Gamma\beta$, $\beta = \gamma\alpha\gamma'$. On peut voir qu'il y a un nombre fini d'orbites [DS05, Lemma 5.1.1 et 5.1.2], pour lesquelles on choisit un ensemble de représentants $\{\alpha_j\}$. On définit donc, pour $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma)$,

$$f[\Gamma\alpha\Gamma']_k = \sum_j f|_k\alpha_j$$

On peut vérifier que $f[\Gamma\alpha\Gamma']_k$ est dans $\mathcal{M}_k(\Gamma')$ et que si $f$ est parabolique, alors $f[\Gamma\alpha\Gamma']_k$ l'est aussi. On a trois cas d'intérêt

1. $\Gamma\supset\Gamma'$ et $\alpha$ est l'identité. Alors $f[\Gamma\alpha\Gamma']_k = f$ et cela donne l'inclusion de $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma')$.
2. $\Gamma = \alpha\Gamma'\alpha^{-1}$. Alors $f[\Gamma\alpha\Gamma']_k = f|_k\alpha$, qui donne l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ et $\mathcal{M}_k(\Gamma')$.

3. $\Gamma \subset \Gamma'$ et $\alpha$ est l'identité. Alors $[\Gamma\alpha\Gamma']_k$ est la trace qui projette $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ sur $\mathcal{M}_k(\Gamma')$.

En fait, $[\Gamma\alpha\Gamma']_k$ est toujours la composition de ces trois opérateurs. Si on appelle $\Gamma^* = \Gamma \cap \alpha\Gamma'\alpha^{-1}$ et $\Gamma^{*'} = \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma'$, alors on a

$$[\Gamma\alpha\Gamma']_k = [\Gamma^{*'}\alpha\Gamma']_k[\Gamma^*\alpha\Gamma^{*'}]_k[\Gamma\alpha\Gamma^*]_k.$$

Maintenant, on va concentrer nôtre intérêt sur $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma_1(N)$. En raison du fait que $\Gamma_1(N)$ est distingué dans $\Gamma_0(N)$, si on choisit $\alpha$ dans $\Gamma_0(N)$, $[\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N)]_k$ ne dépend que de l'image de $\alpha$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^*$ et on peut définir, pour $d$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^*$,

$$\begin{array}{cccc} \langle d\rangle & : & \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) & \rightarrow & \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \\ & & f & \longmapsto & f|_k\alpha \end{array}$$

si l'image de $\alpha$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^*$ est $d$. On appelle $\langle d\rangle$ opérateur diamant. Ensuite, on définit, pour $p$ premier,

$$\begin{array}{ccccc} T_p & : & \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) & \rightarrow & \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \\ & & f & \longmapsto & f[\Gamma_1(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\Gamma_1(N)]_k \end{array}$$

En définissant $\mathbf{1}_N$ comme le prolongement (à 0) du caractère trivial de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on a les formules suivantes pour le développement en série de $T_pf$ [DS05, Proposition 5.2.2].

- Si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$, alors

$$a(n, T_pf) = a(np, f) + \mathbf{1}_N(p)p^{k-1}a(n/p, \langle p\rangle f).$$

- Si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$, $\chi$ caractère mod $N$, alors $T_pf \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ et

$$a(n, T_pf) = a(np, f) + \chi(p)p^{k-1}a(n/p, f).$$

On sait [DS05, Proposition 5.2.4] que les opérateurs $\langle d\rangle$ et $T_p$ commutent entre eux. Maintenant on veut définir $\langle n\rangle$ et $T_n$ pour $n$ quelconque ; si $(n, N) > 1$, alors $\langle n\rangle$ est l'opérateur nul et pour les opérateurs diamant on a terminé. On définit $T_1 = 1$ et pour $n = p^r$, $r > 1$

$$T_{p^r} = T_pT_{p^{r-1}} - p^{k-1}\langle p\rangle T_{p^{r-2}}$$

Cette définition paraît mystérieuse, mais elle est cohérente avec (et déduite de) le résultat que l'on a quand on calcule $a(n, T_pT_q)$ pour $p \neq q$. On a que pour différents nombres premiers, $T_{p^r}$ et $T_{q^s}$ commutent et on peut définir, pour $n = \prod p_i^{r_i}$,

$$T_n = \prod T_{p_i^{s_i}}.$$

On appelle algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(\Gamma_1(N))$ la sous-algèbre de $End(\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)))$ engendrée par les opérateurs $T_n$ et $\langle n\rangle$. Par la construction qu'on a fait, il est clair qu'on peut définir de la même façon les algèbres de Hecke pour $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Il faut faire attention, parce que, pour deux nombres $N$ et $N'$ différents, l'action $T_p$ sur $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ peut être différente de l'action sur $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'))$ (si $p$ divise seulement un nombre parmi $N$ et $N'$).

On peut prouver le lemme suivant [Hid93, Lemma 1 page 141]

**Lemme 1.2.1.** *L'espace $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.*

En définissant, pour un sous-anneau $A$ de $\mathbb{C}$, ayant corps des fractions $K$,

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{m}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) & = & \{f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi; K) : a(n, f) \in A \text{ pour } n > 0\} \\ & = & K + \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi; A)/K, \end{array}$$

la deuxième égalité est due au fait que les constantes ne sont pas des formes modulaires de poids positif. On peut donc démontrer le théorème suivant

**Théorème 1.2.2.** *On suppose que $A$ contient $\mathbb{Z}[\chi]$. On définit*

$$\begin{array}{rccc} (,) & : & \mathscr{m}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) \times \mathcal{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A) & \longrightarrow & A \\ & & (h, f) & \longmapsto & a(1, f|h) \end{array}$$

*qui est un accouplement parfait, donc :*

$$\begin{array}{rcl} Hom_A(\mathcal{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), A) & \cong & \mathscr{m}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), \\ Hom_A(\mathscr{m}_k(\Gamma_0(N), \chi; A)) & \cong & \mathcal{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), \\ Hom_A(\mathscr{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), A) & \cong & \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi; A), \\ Hom_A(\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi; A)) & \cong & \mathscr{h}_k(\Gamma_0(N), \chi; A). \end{array}$$

Maintenant, notre intérêt est de chercher des formes qui soient des vecteurs propres pour les opérateurs de Hecke et de prendre ces formes comme une base de l'espace des formes modulaires, mais malheureusement cela ne sera pas possible. Le premier pas en cette direction est d'introduire un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{S}_k(\Delta)$ appelé le produit de Petersson

$$(f, g)_\Delta = \int_{X(\Delta)} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dx dy.$$

On peut démontrer que ce produit est bien défini : il est invariant par $\Delta$ et absolument convergent. Il est défini positif. On peut démontrer que les adjoints pour $T_n$ et $\langle n \rangle$, $(n, N) = 1$, par rapport à ce produit hermitien sur $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ sont $\langle n \rangle^{-1} T_n$ et $\langle n \rangle^{-1}$ respectivement [DS05, Theorem 5.5.3] et donc ils commutent avec leur adjoint. Par le théorème spectral, $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ a une base composée des formes propres pour ces opérateurs et maintenant on voudrait démontrer qu'ils sont formes propres pour les opérateur pas premiers avec le niveau, mais comme on a déjà dit, il ne sera pas possible.
On voit qu'il y a deux façons d'envoyer $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(M))$ dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ si $M$ divise $N$ : la première est donnée par l'immersion, parce que $\Gamma_1(N) \supset \Gamma_1(M)$ si $M$ divise $N$, la deuxième consiste à envoyer $f(z)$ dans $d^{k-1} f| \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z) = f(dz)$ pour $d$ qui divise $N/M$. On définit, pour $d$ divisant $N$,

$$\begin{array}{rcccc} i_d & : & \mathcal{S}_k(\Gamma_1(Nd^{-1}))^2 & \longrightarrow & \mathcal{S}_k(\Gamma_1(Nd)) \\ & & (f(z), g(z)) & \longmapsto & f(z) + g(dz) \end{array}$$

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{old} = \sum_{d|N} i_d(\mathcal{S}_k(\Gamma_1(Nd^{-1}))^2)$$

et $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{new}$ son supplémentaire orthogonal pour le produit de Petersson. On peut voir que ces deux espaces sont stables sous l'action de l'algèbre de Hecke et donc ils ont une base de vecteurs propres pour les opérateurs en dehors de $N$ [DS05, Proposition 5.6.2]. Avec le lemme principal [DS05, Lemma 5.7.1]

**Lemme 1.2.3.** *Si pour $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$, les coefficients $a(n,f)$ sont nuls si $(n,N)=1$, alors $f = \sum f_p(pz)$ avec $f_p \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N/p))$*

**Définition 1.2.4.** *Une forme modulaire $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ non nulle qui est une forme propre pour tous les $T_n$ et $\langle n\rangle$ est une* ***forme propre (de Hecke)****. Elle est normalisée si $a(1,f)=1$. Une* ***forme nouvelle*** *est une forme propre et normalisée dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{new}$.*

On démontre que si $f$ est une forme propre pour les opérateurs en dehors de $N$ et nouvelle, alors elle est une forme propre pour tous les opérateurs de l'algèbre de Hecke. On a les résultats suivants [DS05, Theorem 5.8.2 - 5.8.3 Proposition 5.8.4 - 5.8.5]

**Théorème 1.2.5.** *Soit $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{new}$ une forme propre non nulle pour $T_n$ et $\langle n\rangle$ avec $(n,N)=1$. Alors*

- *$f$ est une forme propre de Hecke et il existe $\lambda$ tel que $\lambda f$ soit une forme nouvelle,*
- *si $f'$ satisfait les mêmes conditions et a les mêmes valeurs propres pour $T_n$, alors $f' = \lambda f$.*

*Les formes nouvelles forment une base orthogonale pour $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{new}$, chacune d'entre elles est dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi)$ et satisfait $T_n(f) = a(n,f)f$ pour tout $n$.*

**Théorème 1.2.6.** *L'ensemble*

$$\{f(nz) : f \text{ forme nouvelle de niveau } M \text{ et } nM|N\}$$

*est une base de $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$*

**Proposition 1.2.7.** *Soit $g \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ une forme propre normalisée, alors il existe $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(M))^{new}$ avec $M|N$ tel que $a(p,f)=a(p,g)$ pour tout $p \nmid N$.*

**Proposition 1.2.8.** *Soit $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)$, alors $f$ est une forme propre normalisée si et seulement si*

1. $a(1,f)=1$
2. $a(p^r,f) = a(p,f)a(p^{r-1},f) - \chi(p)p^{k-1}a(p^{r-2},f)$
3. $a(mn,f) = a(m,f)a(n,f)$ *si* $(m,n)=1$

Il faut noter que, afin de démontrer ces théorèmes, Diamond et Shurman utilisent le *Strong Mulplicity One Theorem* [PS79b] pour la représentation automorphe associe a une forme nouvelle [PS79a].
Si on considère l'espace $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(p))$ pour $p$ premier, ou $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N),\chi)$ pour $\chi$ primitif, on a que la base pour ces espaces du théorème 1.2.6 est orthogonale, parce que il n'y a pas de formes vieilles. On peut aussi prouver que si $\chi$ est primitif, on a, pour tout $n$

$$\begin{aligned} E_k|T_n &= \sigma_{k-1}(n)E_k \\ E_k(\chi)|T_n &= \sigma_{k-1,\chi}(n)E_k(\chi) \\ G_k(\chi)|T_n &= \sigma_{k-1}*\chi(n)G_k(\chi) \end{aligned}$$

et cela nous donne une base aussi pour $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N),\chi)$ et $\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$.

## 1.3 Fonction $L$ et produit de Rankin

Maintenant on va définir des fonctions analytiques qui encodent les informations arithmétiques des formes modulaires. Pour une forme modulaire de $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,f)q^n$, on définit

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n,f)}{n^s}.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\int_{t=0}^{\infty} f(it)t^{s-1}dt = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f),$$

où le membre à gauche est la transformée de Mellin de $f$ et $\Gamma(s)$ est la fonction Gamma d'Euler. De plus, on a que cette fonction $L$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > k/2+1$ si $f$ est parabolique et pour $\mathrm{Re}(s) > k$ sinon [DS05, Proposition 5.9.1]. Si on définit

$$\begin{array}{cccc} \tau'_N & : & \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N)) & \to & \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N)) \\ & & f & \longmapsto & i^k N^{-k/2} z^{-k} f(-1/(Nz)) \end{array}$$

et

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_1(M))^{\pm} = \{f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N)) : f|\tau'_N = \pm f\}$$

on a [DS05, Theorem 5.10.2]

**Théorème 1.3.1.** *Soit $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(M))^{\pm}$ et $\Lambda_N(s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$, alors*

$$\Lambda_N(s) = \pm\Lambda_N(k-s)$$

*et donc $L(f,s)$ a un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$*

Dans la suite, on essayera de trouver un analogue $p$-adique de cette fonction $L$, en mimant cette formulation intégrale (on utilisera de distributions $p$-adiques). La condition que $f$ soit dans l'espace propre associé à $\pm 1$ est restrictif ; en fait on a toujours pour une forme propre primitive

$$f|\tau_N = W(f)i^{-k}f^c$$

pour $c$ la conjugaison complexe. Le nombre $W(f)$ est le "root number" de $f$ et on peut voir dans [Hid93, Theorem 5.5.2] une généralisation du théorème précédant. On termine avec le résultat suivant [DS05, Theorem 5.9.2]

**Théorème 1.3.2.** *Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,f)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$, les affirmations suivantes sont équivalentes*
- *$f$ est une forme propre normalisée*
- *$L(s,f)$ a une formulation en produit d'Euler*

$$L(s,f) = \prod_p \left(1 - a(p,f)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

On prend deux formes modulaires $f$ et $h$ sur $\Gamma_1(N)$ de poids $k$ et $k'$ et on définit la fonction zêta du produit de Rankin de $f$ et $h$

$$D(s,f,h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n,f)}a(n,h)}{n^s}$$

**Théorème 1.3.3.** *Soient $f$ et $h$ deux formes propres nouvelles pour $\Gamma_1(N)$ avec caractères $\chi$ et $\psi^{-1}$ de niveau $k$ et $k'$, $f$ parabolique, alors, pour $s > k/2+k'+1$*

$$L(2-k-a+2s)D(s,f,h) =$$
$$= \prod_q \left((1-\alpha_q\alpha'_q q^{-s})(1-\alpha_q\beta'_q q^{-s})(1-\beta_q\alpha'_q q^{-s})(1-\beta_q\beta'_q q^{-s})\right)^{-1}$$

*où $\alpha_q, \beta_q$ (resp. $\alpha'_q, \beta'_q$) sont les racines de $X^2 - \overline{a(q,f)}X + \chi^{-1}(q)q^{k-1}$ (resp. $X^2 - a(q,h)X + \psi^{-1}(q)q^{k'-1}$). De plus, si $k > 2k'+2$ alors, pour $g = \overline{h}E_{k-k'}((\chi\psi)^{-1})$,*

$$(f,g)_{\Gamma_0(N)} = \frac{N^{k'}(k-2)!(k'-1)!}{(-2\pi i)^{k'}G((\chi\psi)^{-1})(4\pi)^{k-1}}L(k-k',\chi^{-1}\psi^{-1})D(k-1,f,h)$$

*Démonstration.* D'apès la proposition 1.2.8, on a

$$a(q^r,f) = a(q,f)a(q^{r-1},f) - \chi(q)q^{k-1}a(q^{r-2},f)$$

et on sait que

$$\overline{a(q^r,f)} = \frac{\alpha_q^{n+1}-\beta_q^{n+1}}{\alpha_q-\beta_q}, a(q^r,h) = \frac{{\alpha'_q}^{n+1}-{\beta'_q}^{n+1}}{\alpha'_q-\beta'_q},$$

donc on a

$$\begin{aligned}
Q(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a(q^r,f)}a(q^r,h)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_q^{n+1}-\beta_q^{n+1})({\alpha'_q}^{n+1}-{\beta'_q}^{n+1})X^n}{(\alpha_q-\beta_q)(\alpha'_q-\beta'_q)} \\
&= \frac{1}{(\alpha_q-\beta_q)(\alpha'_q-\beta'_q)X} \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{1-\alpha_q\alpha'_qX} + \frac{1}{1-\alpha_q\beta'_qX} + \frac{1}{1-\beta_q\alpha'_qX} + \frac{1}{1-\beta_q\beta'_qX}\right] \\
&= \frac{1-\alpha_q\alpha'_q\beta_q\beta'_qX^2}{(1-\alpha_q\alpha'_qX)(1-\alpha_q\beta'_qX)(1-\beta_q\alpha'_qX)(1-\beta_q\beta'_qX)}
\end{aligned}$$

compte tenue de l'égalité $\alpha_q\alpha'_q\beta_q\beta'_q = (\chi\psi)^{-1}(q)q^{k+k'-2}$. On termine en trasformant la somme en un produit d'Euler (pour $s > k/2+k'+1$ on a convergence absolue) et en remplaçant $X$ par $q^{-s}$ .
Pour la deuxième partie, posons $l = k-k'$

$$\begin{aligned}
2^{-1}E_l'(\chi\psi) &= 2^{-1}\sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{\chi\psi(d)(cN+zd)^l} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi^{-1}\psi^{-1}(n)}{n^l}\sum_{gcd(cN,d)=1}\frac{1}{\chi\psi(d)(cN+zd)^l} \\
&= L(l,(\chi\psi)^{-1})\sum_{\gamma\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\chi^{-1}\psi^{-1}(\gamma)j(\gamma,z)^{-l}
\end{aligned}$$

où $\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma_0(N) : \gamma(\infty) = \infty\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{Z} \right\}$.

En considérant les formules suivantes

$$\begin{array}{rr} \overline{f(\gamma(z))} = \chi^{-1}(\gamma)\overline{f(z)j(\gamma,z)^k} & h(\gamma(z)) = \psi^{-1}(\gamma)h(z)j(\gamma,z)^{k'} \\ \gamma^*(y^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = y^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y & y(\gamma(z)) = y(z)|j(\gamma,z)|^{-2k} \end{array}$$

on obtient, pour $\Phi$ domaine fondamental pour $\Gamma_0(N)$ et $C_0$, constant de rationalisation de $E_l^{'}$ comme ci-dessus (1.1),

$$\begin{aligned} (f,g) &= C_0 L(l,(\chi\psi)^{-1}) \int_\Phi \overline{f} h(z) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \chi^{-1}\psi^{-1}(\gamma) j(\gamma,z)^{-l} \mathrm{d}\mu \\ &= C_0 L(l,(\chi\psi)^{-1}) \int_\Phi \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \overline{f} h(\gamma(z)) y(\gamma(z))^k \gamma^*(y^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

et parce que $\{z = x+iy : 0 < x < 1, y > 0\}$ est un domaine fondamental pour $\Gamma_\infty$, en échangeant l'intégrale avec la somme (si $k > 2k' - 2$, on a convergence absolue) et en développant en série de Fourier, on a

$$\begin{aligned} (f,g) &= C_0 L(l,(\chi\psi)^{-1}) \int_0^\infty \sum_{m,n} \overline{a(m,f)} a(n,h) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= C_0 L(l,(\chi\psi)^{-1}) \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \overline{a(n,f)} a(n,h) e^{-2\pi 2y} y^{k-2} \mathrm{d}y \\ &= C_0 L(l,(\chi\psi)^{-1}) \Gamma(k-1)(4\pi)^{k-1} \sum_{n=1}^\infty \overline{a(n,f)} a(n,h) n^{-k+1} \end{aligned}$$

□

On voudrait maintenant donner une formulation intégrale pour $D(s,f,h)$, comme on l'a fait pour $L(s,f)$, peut-être en remplaçant $y^k$ avec $y^s$, mais il est claire que cela ne peut pas marcher, parce que on n'aurait plus l'annulation des facteurs $j(\gamma,z)$. On définira dans la suite des séries d'Eisenstein en deux variables, qui seront adéquates pour une formulation intégrale (3.3.4).

## 1.4 Formes modulaires $p$-adiques et ordinaires

Maintenant, on veut se concentrer sur les formes modulaires à coefficient $p$-adiques, donc on fixe un nombre premier $p$ et une normalisation de la norme $p$-adique sur $\mathbb{Q}$ ($|p|_p = p^{-1}$) et une complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ ($\mathbb{C}_p$). On regard $\overline{\mathbb{Q}}$ soit dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{C}_p$. Pour un corps $p$-adique $K$, on choisit $K_0$, corps des nombres qui est dense dans $K$ par rapport à la topologie $p$-adique et on considère, pour $\Delta = \Gamma_1(N), \Gamma(N)$

$$\mathcal{M}_k(\Delta; K) = \mathcal{M}_k(\Delta; K_0) \otimes K$$

On peut définir ici une norme $p$-adique $|f|_p = max_n \{|a(n,f)|_p\}$ qui est toujours finie et on peut regarder $\mathcal{M}_k(\Delta; K)$ comme la complété de $\mathcal{M}_k(\Delta; K_0)$, par rapport à la topologie p-adique, dans $K[[q]]$. Par conséquence, on a deux façon pour définir $\mathcal{M}_k(\Delta;\mathcal{O}_K)$ ; ou comme les elements de $\mathcal{M}_k(\Delta;K)$ de norme plus petite ou égal à 1, ou comme les éléments (vue dans $K[[q]]$) à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. Pour chaque $j>0$, on définit, pour $A=K$ ou $\mathcal{O}_K$

$$\mathcal{M}^j(\Delta;A)=\bigoplus_{k=0}^{j}\mathcal{M}_k(\Delta;A), \mathcal{S}^j(\Delta;A)=\bigoplus_{k=0}^{j}\mathcal{S}_k(\Delta;A)$$

$$\mathcal{M}(\Delta;A)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{M}_k(\Delta;A),\ \mathcal{S}(\Delta;A)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{S}_k(\Delta;A)$$

La complété $\overline{\mathcal{M}}(\Delta;A)$ (resp. $\overline{\mathcal{S}}(\Delta;A)$) est l'espace des formes modulaires (resp. paraboliques) $p$-adiques. Pour justifier les résultats suivants, il faut d'abord que je présente les formes modulaires à la Katz, en suivant [Hid86b], où Hida récapitule les articles de Katz [Kat76, Chapters II et VI]. On définit $\mathbb{G}_m$ comme $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,\frac{1}{x}])$ et $\mu_N$ comme le noyau de la multiplication par $N$ dans $\mathbb{G}_m$ (i.e. $\mathrm{Spec}(\frac{\mathbb{Z}[x]}{x^N-1})$. Pour chaque anneau commutatif $A$ on considère l'ensemble de triplets $(E,\omega,i)$ avec

- $E$ une courbe elliptique sur $A$ (schéma abelién de dimension 1).
- $\omega$ une différentielle non nulle, invariante sur $E$.
- $i$ une inclusion de $\mu_N$ dans $E[N]$ (le noyau de la multiplication par $N$ sur $E$).

Un exemple d'un tel triplet est la courbe de Tate $(\mathrm{Tate}(q),\omega_{can},i_{can})$ [KM85, 8.8] ou, pour 'formules brutales', [Sil94, Chapter 5, §5]), auquelle on peut penser comme le quotient de $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}((q))}$ par $q^{\mathbb{Z}}$, muni du pullback $\omega_{can}$ de $\mathrm{d}x/x$ sur $\mathbb{G}_m$ et de l'inclusion $i_{can}$, donnée par le morphisme d'anneau $\mathbb{Z}[x,\frac{1}{x}]\to\frac{\mathbb{Z}[x]}{x^N-1}$ ; on veut donc considérer les courbes elliptiques avec un point d'ordre exact $N$ fixé. Dans ce contexte, les $A$-formes modulaires de poids $k$ sur $\Gamma_1(N)$ sont les fonctions $f$ qui à un triplet $(E,\omega,i)$, défini sur $A'$, sur-anneau de $A$, associent un élément $f(E,\omega,i)$ dans $A'$, de sort que

1. $f((E,\omega,i))$ dépende seulement de la classe de $A'$-isomorphisme de $(E,\omega,i)$
2. $f$ soit compatible avec le changement de base
3. Pour toutes $a$ dans $(A')^\times$, on ait $f(E,a^{-1}\omega,i)=a^k f(E,\omega,i)$

On appelle ces espaces $R_k(\Gamma_1(N),A)$. On a un plongement donné par l'évaluation de $f$ sur $(\mathrm{Tate}(q),\omega_{can},i_{can})$

$$R_k(\Gamma_1(N),A)\hookrightarrow A((q))$$

et on a le principe de $q$-expansion qui dit que, pour touts sur-anneaux $A'$

$$f\in R_k(\Gamma_1(N),A)\Leftrightarrow f(\mathrm{Tate}(q),\omega_{can},i_{can})\in A((q)) \text{ et } f\in R_k(\Gamma_1(N),A')$$

On peut définir aussi deux structures de niveau $N$, qui considèrent pas un point, mais tout les points de $N$ torsion $E[N]$, qui sont localement libres de rang 2 [KM85, Theorem 2.3.1]. D'abord, on définit l'accouplement suivant

$$\begin{array}{cccc}\langle,\rangle & : & (\mu_N\times\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\times(\mu_N\times\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mu_N\\ & & ((\zeta,m),(\xi,n)) & \longmapsto & \zeta^n/\xi^m\end{array}$$

et les structures

**i)** $\beta : \mu_N \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong E[N]$, tel que $\langle , \rangle$ coïncide avec l'accouplement de Weil $e_N$ (définit dans [Sil09, Chapter III, §8]) sur $E[N]$

**ii)** $\alpha : \mathbb{Z}/NZ \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong E[N]$

Pour l'existence de $\alpha$, il faut que $N$ soit inversible dans $A$ [KM85, Corollary 2.3.2]. Une explication naïve de cela est que localement, pour les nombres $p$ premiers dans $A$ divisant $N$, $\mu_N$ et $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphe. Dans le cas $N = p$ et $p$ premier en $A$, on a que $\mu_p$ est un point avec multiplicité et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient $p$ points. On définit donc les formes modulaires $R_k(\Gamma(N); A)$ (resp. $\mathcal{R}_k(\Gamma(N); A)$) comme les fonctions sur les triplets $(E, \omega, \beta)$ (resp. $(E, \omega, \alpha)$) qui ont les propriétés 1-3. On appelle $\beta$ arithmétique et $\alpha$ naïve. On pose $\det(\alpha) = e_N(\alpha(1, 0), \alpha(0, 1))$ et on note que $\det(\alpha)$ est une racine primitive $N$-ieme de l'unité ($e_N$ est surjectif) et on définit

$$\beta_\alpha(\det(\alpha)^m, n) = \alpha(m, n)$$

et nous donnent une correspondance entre

$$\{\text{naïve } \Gamma(N) \text{ structure}\} = \{\zeta \in \mu_N(A) : \zeta \text{ primitive}\} \times$$

$$\times \{\text{arithmétique } \Gamma(N) \text{ structure}\}$$

qui donne

$$R_k(\Gamma(N); A) \cong \mathcal{R}_k(\Gamma(N); A) \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}].$$

On a une structure arithmétique canonique $\beta_{can}$ sur $\mathrm{Tate}(q)$ donnée par $\beta_{can}(\zeta, n) = \zeta q^{n/N}$ et on a encore la validité du principe de $q$-expansion, en évaluant un élément de $R_k(\Gamma(N); A)$ sur $(\mathrm{Tate}(q), \omega_{can}, \beta_{can})$ et de plus, en restreignant $\beta$ sur $\mu_N$, on a le choix d'un point d'ordre exact $N$ et donc, pour $f$ dans $R_k(\Gamma_1(N), A)$ on définit $f(E, \omega, \beta) = f(E, \omega, \beta|_{\mu_N})$, qui donne un plongement (toujours par le principe de $q$-expansion) de $R_k(\Gamma_1(N), A)$ dans $R_k(\Gamma(N), A)$. Par l'isomorphisme entre structures et ce plongement, on peut évaluer une forme modulaire dans $R_k(\Gamma_1(N), A)$ sur $(\mathrm{Tate}(q), \omega_{can}, \alpha)$ pour tout le $\alpha$ qui donne une structure naïve.

On a que chaque courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ peut être identifié un tore complexe et donc, à isomorphisme de surface de Riemann près, avec un réseau. Á chaque réseau on associé un nombre complexe $\tau$, de sorte que le réseau soit à isomorphisme près, $L_\tau = 2\pi i(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$. En choisissant $dz$ comme le différentielle invariante et $i(\mu_N) = \frac{1}{N} \bmod L_\tau$, on plonge une $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ dans $R_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C})$ par le principe de $q$-expansion, en identifiant $q$ avec $e^{2\pi i z}$ et en posant

$$f(\mathbb{C}/L_\tau, dz, i) = (2\pi i)^k f(\tau).$$

On a, à la fin

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) = \left\{ f \in R_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C}) : f(\mathrm{Tate}(q), \omega_{can}, \alpha) \in \mathbb{C}[[q^{1/N}]] \forall \alpha \right\}.$$

Maintenant, on retourne à l'étude des formes modulaires $p$-adiques ; on dit que $A$ est un anneau $p$-adique si $A = \varprojlim A/p^n A$ . Si, par exemple, $p$ est nilpotent dans $A$, alors $A$ est un anneau $p$-adique, mais un corps $p$-adique n'est pas un anneau $p$-adique ($p$ est inversible). On dit que $\phi$ est un trivialisation de $E$ si $\phi : \widehat{E} \cong \widehat{\mathbb{G}}_m$, où $\widehat{E}$ est la complétion de $E$ à l'origine (complété par le sous-schéma fermé correspondant à le point $O$, pour une description naïve [Sil09, Chapter IV]). Maintenant, soit $A$ un anneau $p$-adique et $N = N_0 p^r$, avec $(p, N) = 1$. On considère les triplets $(E, \phi, i)$, $(E, \phi, \beta)$ et $(E, \phi, \alpha)$ où $i$, $\beta$ et $\alpha$ sont définis comme avant mais avec la condition supplementaire que $\phi \circ i$ ou $\phi \circ \beta$ soit l'inclusion naturelle dans $\widehat{\mathbb{G}}_m$. On définit $V(\Gamma_1(N); A)$ (resp. $V(\Gamma(N_0); A)$ et $\mathcal{V}(\Gamma(N_0); A)$) comme les fonctions sur les triplets $(E, \phi, i)$ (resp. $(E, \phi, \beta)$ et $(E, \phi, \alpha)$) qui à chaque triplet associe un élément d'une sur-algèbre $p$-adiques $A'$, que ne depend que de la classe de $A'$-isomorphisme et compatible avec le changement de base. De la même façon que avant on a

$$V(\Gamma(N_0); A) \cong \mathcal{V}(\Gamma(N_0); A) \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}]$$

En raison du fait que la courbe de Tate est un quotient de $\mathbb{G}_m$ on a $\phi_{can} : \widehat{\mathrm{Tate}(q)} \cong \widehat{\mathbb{G}}_m$ et soit $i_{can}$ soit $\beta_{can}$ donnent, par composition avec $\phi_{can}$, l'inclusion naturelle dans $\widehat{\mathbb{G}}_m$ et par évaluation sur les triplets $(\mathrm{Tate}(q), \phi_{can}, i_{can})$ et $(\mathrm{Tate}(q), \phi_{can}, \beta_{can})$ on a

- $V(\Gamma_1(N); A) \hookrightarrow \widehat{A((q))}$ et $V(G(\mathcal{N}); A) \hookrightarrow \widehat{A((q^{1/N}))}$
- Si $A' \supset A$, alors $V(\Gamma_1(N); A) = V(\Gamma_1(N); A') \cap \widehat{A((q))}$ et aussi $V(\Gamma(N); A) = V(\Gamma(N); A') \cap \widehat{A((q^{1/N}))}$
- Le quotient de $\widehat{A((q))}$ et par $V(\Gamma_1(N); A)$ et aussi de $\widehat{A((q^{1/N}))}$ par $V(\Gamma(N); A)$ est $A$-plat.

Parce que on a demandé que $i$ ne dépende pas de la $p$ part de $N$, est clair qu'on a une équivalence entre les triplets $(E, \phi, i)$ de niveau $N$ et $N_0$ et donc

$$V(\Gamma_1(N); A) = V(\Gamma_1(N_0); A)$$

et par les mêmes raisons que avant, on peut évaluer $f$ dans $V(\Gamma_1(N); A)$ sur tout les triplets $(\mathrm{Tate}(q), \phi, \alpha)$ et on définit

$$\begin{aligned}
W(\Gamma_1(N); A) &= \left\{ f \in V(\Gamma_1(N)) : f(\mathrm{Tate}(q), \phi, \alpha) \in A[\zeta_N][[q^{1/N}]] \forall \phi, \alpha \right\} \\
\mathcal{W}(\Gamma(N_0); A) &= \left\{ f \in \mathcal{V}(\Gamma(N_0)) : f(\mathrm{Tate}(q), \phi, \alpha) \in A[\zeta_N][[q^{1/N}]] \forall \phi, \alpha \right\} \\
W(\Gamma(N_0); A) &= \left\{ f \in V(\Gamma(N_0)) : f(\mathrm{Tate}(q), \phi, \alpha) \in A[\zeta_N][[q^{1/N}]] \forall \phi, \alpha \right\}
\end{aligned}$$

on a toujours

$$\begin{aligned}
W(\Gamma_1(N); A) &= W(\Gamma_1(N_0); A) \\
\mathcal{W}(\Gamma(N_0); A) &= W(\Gamma(N); A) \otimes \mathbb{Z}[1/N_0, \zeta_{N_0}]
\end{aligned}$$

La condition que $f(\mathrm{Tate}(q), \phi, \alpha)$ soit dans $A[[q]]$ pour toute trivialisation et structure de niveau $\alpha$ est équivalent à demander que $f$ soit holomorphe aux cusps de la compactification de la variété qui classifi les triplets $(E, \phi, \alpha)$ [Kat75, 1.0]. On définit en-suite l'action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{W}(\Gamma(N_0); A)$ ; pour $\gamma$ in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})$ et $f$ dans $\mathcal{W}(\Gamma(N_0); A)$ on pose $f|\gamma(E, \phi, \alpha) = f(E, \phi, \alpha \circ \gamma)$. En calculant comme cette action modifie la $q$-expansion, pour

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}) \right\}, U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}) \right\},$$

on a

$$\begin{aligned} W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p) &= \mathcal{W}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p)^U \\ W(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p)\otimes\mathbb{Z}[\zeta_{N_0}] &= \mathcal{W}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p)^{U_0}. \end{aligned}$$

On pose $Z_{N_0} = \mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})^\times$ et on définit l'action à droite de $Z_{N_0}$ sur $V(\Gamma(N);A)$ et $W(\Gamma(N);A)$ en posant, pour $z = (z_p, z_0)$, $f \circ z(E,\phi,\alpha\circ\gamma) = f(E, z_p^{-1}\phi, z_0 \circ i)$ et cette action est continue pour la topologie $p$-adique. Soit $\Gamma = 1+p\mathbb{Z}_p$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^\times$ (et de $Z_{N_0}$) des unités principales. En fin, pour tout couple $(E,\phi)$, on peut associer une forme différentielle invariante $\omega = \phi^*\omega_0$, pour $\omega_0$ la différentielle canonique de $\widehat{\mathbb{G}}_m$ (qui est induite par $\mathrm{d}x/x$). On a donc, pour tout $k$, des plongement (par le principe de $q$-expansion)

$$\begin{aligned} R_k(\Gamma_1(N);A) &\hookrightarrow V(\Gamma_1(N);A) \\ \mathcal{R}_k(\Gamma(N);A) &\hookrightarrow \mathcal{V}(\Gamma(N_0);A) \\ R_k(\Gamma_1(N);A) &\hookrightarrow V(\Gamma(N_0);A). \end{aligned}$$

On a donc que $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);A)$ est plongé dans $V(\Gamma_1(N);A)\otimes\mathbb{Q}_p \cap A[[q]]$, qui est de torsion dans $A((q))/V(\Gamma_1(N);A)$, donc par $A$-platitude on déduit que $f$ est dans $V(\Gamma_1(N);A)$ et aussi dans $W(\Gamma_1(N);A)$. Parce que l'action de $Z_{N_0}$, qui est compact, est continue on a

$$W(\Gamma_1(N);A) \supset \overline{\mathcal{M}(\Gamma_1(N);A)}$$

et, de la même façon,

$$W(\Gamma_0(N);A) \supset \overline{\mathcal{M}(\Gamma_0(N);A)}.$$

On pose

$$\mathbf{E}_{p-1} = \frac{B_{p-1}}{p-1}E_{p-1} = 1 - \frac{2(p-1)}{B_{p-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{p-2}(n)q^n$$

et on sait que $\mathbf{E}_{p-1} \equiv 1 \bmod p$, parce que $p$ divise le dénominateur de $B_{p-1}$. Soit $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]/p\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]$, qui est une extension finie de $\mathbb{F}_p$ et soient

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k(\Gamma(N_0);\mathbb{F}) &= \mathcal{M}_k(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])\otimes\mathbb{F} \\ G(\Gamma(N_0);\mathbb{F}) &= \bigoplus_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_k(\Gamma(N_0);\mathbb{F}). \end{aligned}$$

Par le principe de $q$-expansion, on a un morphisme naturel de $G(\Gamma(N_0);\mathbb{F})$ vers $\mathbb{F}[[q]]$ qui ne peut pas être injectif ($\mathbf{E}_{p-1}-1$ est dans le noyau). On sait que

$$W(\Gamma(N_0);\mathbb{F}) = W(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])\otimes\mathbb{F}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant

**Théorème 1.4.1.** *Soit $N_0 \geq 3$ ou $p \geq 5$. On a*
- $W(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]) = \overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])$ *dans* $\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}][[q^{1/N_0}]]$,
- $W(\Gamma(N_0);\mathbb{F})^\Gamma \cong G(\Gamma(N_0);\mathbb{F})/(\boldsymbol{E}_{p-1}-1)$ *et il préserve la q expansion.*

La preuve de cela peut être trouver dans [Kat75, §2] et on a le corollaire suivant, pour $\Gamma_1(N)$ et $\mathbb{F}_p$, du à Hida [Hid86b, Corollary 1.2].

**Corollaire 1.4.2.** *Soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);\mathbb{F}_p) &= \mathcal{M}_k(\Gamma(N);\mathbb{Z}_p)\otimes\mathbb{F}_p, \\ G(\Gamma_1(N);\mathbb{F}_p) &= \bigoplus_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);\mathbb{F}_p). \end{aligned}$$

*Alors*

- $W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p)=W(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)=\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$ *dans* $\mathbb{Z}_p[[q]]$,
- $W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{F}_p)^{\Gamma}\cong G(\Gamma_1(N_0);\mathbb{F}_p)/(\boldsymbol{E}_{p-1}-1)$ *et il préserve la q-expansion.*

*Démonstration.* Par le théorème ci-dessus, on peut identifier

$$\mathcal{W}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]))=\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])\otimes\mathbb{Z}[1/N_0,\zeta_{N_0}].$$

L'action de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})$ sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])\otimes\mathbb{Z}[1/N_0,\zeta_{N_0}]$ est donné dans la façon suivante

- Pour $\gamma$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z})$, l'action sur $f$, de poids $k$ est $f|\gamma=f|_k\overline{\gamma}$, avec $\overline{\gamma}\equiv\gamma \bmod N$ puisque

  $$\begin{aligned} f|_k(z)=(cz+d)^{-k}f(\gamma(z)) &= f(E_{\gamma(z)},\frac{\mathrm{d}u(cz+d)}{(cz+d)^2},\frac{1}{N} \bmod L_{\gamma(z)}) \\ &= f(E_z,\mathrm{d}u,\frac{(cz+d)}{N} \bmod L_z) \\ &= f|\gamma(E_z,\mathrm{d}u,\frac{1}{N} \bmod L_z) \end{aligned}$$

  pusique $E_{\gamma(z)}=E_z$ et puis on a appliqué une homotopie de coefficient $(cz+d)$.
- Pour $\gamma=\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}$, l'action sur les formes modulaires est triviale et sur $\mathbb{Z}[\zeta_{N_0}]$ envoye $\zeta_{N_0}$ dans $\zeta_{N_0}^d$.

On a donc

$$\mathcal{W}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]))^U=\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])^{U_0}=W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]).$$

Il est clair que $\mathcal{M}_k(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])^{U_0}$ est $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])$. De plus,

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{Tr} & : & \overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Q}_p[\zeta_{N_0}]) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Q}_p[\zeta_{N_0}]) \\ & & f & \longmapsto & N_0^{-1}\sum_{u\in U_0} f|u \end{array}$$

est surjective et

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\sum_n a(n/N)q^{n/N}) &= N_0^{-1}\sum_{d=0}^{N_0}\sum_n a(n/N)\zeta_{N_0}^{nd/N}q^{n/N} \\ &= N_0^{-1}\sum_{N|n} N_0 a(n/N)q^{n/N} \\ &= \sum_n a(n)q^n \end{aligned}$$

et donc, parce qu'elle est aussi uniformément continue, $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])$ est envoyé dans $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])$, qui est donc égal à $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}])^{U_0}$. Par définition, on a

$$\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p) = \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]) \cap \mathbb{Z}_p[[q]]$$

et par le principe de $q$ expansion

$$W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p) = W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p[\zeta_{N_0}]) \cap \mathbb{Z}_p[[q]]$$

Et donc le théorem est vrai pour $N_0$ et pour de la même manière pour $N$. Pour la deuxième partie, de la même façon, on prouve que

$$W(\Gamma(N_0);\mathbb{F}_p)^{\Gamma} = G(\Gamma(N_0);\mathbb{F}_p)/(\mathbf{E}_{p-1}-1)$$

et puis, avec Tr, qui envoie $\mathbf{E}_{p-1}-1$ dans lui même et donc

$$W(\Gamma_1(N_0);\mathbb{F}_p)^{\Gamma} = G(\Gamma_1(N_0);\mathbb{F}_p)/(\mathbf{E}_{p-1}-1).$$

□

Ce corollaire nous dit que $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$ est indépendant de la $p$-partie de $N$. Il y une autre construction des formes modulaires $p$-adiques sur $\Gamma_1(N)$, qui fixe le poids $k$ et considère la réunion des formes modulaire des différents niveau $\Gamma_1(Np^r)$ et on peut démontrer que ces deux constructions coïncident (c'est un théorème dû à Hida, [Gou88, Theorem III.3.2]).
Pour $a$ dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ et $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0);K)$, on peut définir

$$f|a(E,\omega,i) = f(E,\omega,ai),$$

qui coïncide avec $\langle a\rangle f = f|_k\gamma$, pour $\gamma \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bmod N$ dans $\Gamma_0(N)$, et puisque $(z_p^{-1}\phi)^*\mathrm{d}x/x = z_p^{-1}((\phi)^*\mathrm{d}x/x)$, on a pour $z=(z_p,z_0)$ dans $Z_{N_0}$, $f|z = z_p^k f|\gamma$, avec $\gamma \equiv \begin{pmatrix} z_0^{-1} & 0 \\ 0 & z_0 \end{pmatrix} \bmod N$.
Si $f$ est dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0);\mathcal{O}_K)$ alors $f|z$ est dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0);\mathcal{O}_K)$ aussi, parce qu'elle est dans $V(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et a encore $q$-expansion entière. Cette action coïncide avec l'action définit ci-dessus de $Z_{N_0}$ sur $V(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$. On considère maintenant les opérateurs de Hecke $T_l$ et $T_{l,l} = l^{-2}\langle l\rangle$ sur $M_k(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ ; pour les formules ci-dessus, on a que $|f|T_l|_p \leq |f|_p$ et, en plus, ils préservent $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);K)$, donc leur action peut être prolongée sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N_0);\mathcal{O}_K)$. Maintenant, on supposera que $p$ divise $N$. Pour $A=K$ ou $\mathcal{O}_K$, on définit $\mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);A)$ comme la $A$-sous-algèbre des endomorphismes $A$-linéaire de $\mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);A)$ engendrée par les opérateurs de Hecke $T_l$ et $T_{l,l}$. Parce que pour $j'>j$ on a le plongement de $\mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);A)$ dans $\mathcal{M}^{j'}(\Gamma_1(N);A)$, on a par restriction un morphisme de $\mathcal{H}^{j'}(\Gamma_1(N);A)$ vers $\mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);A)$, on peut donc définir

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) = \varprojlim \mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K),$$

qui agit sur $\mathcal{M}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et, puisqu'il agit uniformément, on peut prolonger l'action sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$. On sait qu'il est compact parce que limite projectif des anneaux de rang fini sur $\mathcal{O}_K$. Par définition, on a un morphisme de restriction surjectif de $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ vers $\mathcal{H}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$ qui, pour le corollaire

1.4.2, est injectif. On peut définir de la même façon $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);K)$, mais il n'agit pas uniformément et donc on peut pas prolonger sa action sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);K)$. Pour toute extension finie $M$ de $K$, on a que

$$\mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_M\subset\mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_M)$$

et il est d'indice fini, donc

$$\mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_M=\mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_M)$$

car il contient tous les générateurs $T_l$ et $T_{l,l}$ et par définition,

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_M=\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_M).$$

On veut définir maintenant l'idempotent $e$ associé à $T_p$ ; pour faire cela, on se rappelle que dans un anneaux $A$ de rang fini sur $\mathcal{O}_K$, pour tout $x$ dans $A$, $\lim_{n\to\infty} x^{n!}$ est un idempotent de $A$ [Hid93, Lemma 7.2.1] et on pose

$$e_j=\lim_{n\to\infty} T_p^{n!}\in\mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$$

et, parce que cette définition est cohérente avec les flèches de transition, on pose

$$e=\varprojlim_j e_j.$$

Pour un $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$-module $M$, on définit la partie ordinaire $M^{ord}=eM$, qui est l'espace propre de $M$ pour $e$ de valeur prope 1. $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ peut être vu comme la plus grande partie de $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ où $T_p$ est inversible.

**Définition 1.4.3.** *Une forme propre $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N),\psi)$ est ordinaire si*

1. *$N$ est divisible par $p$ ;*
2. *$f|e=f$ pour l'idempotent associé à $T_p$.*

Par la définition qu'on a donnée pour $e$, la deuxième condition est équivalente à $|a(p,f)|_p=1$, parce que

$$f|e=\lim_{n\to\infty} f|T_p^{n!}=\lim_{n\to\infty} a(p,f)^{n!}f$$

qui est 0 si $|a(p,f)|_p<1$, $f$ sinon. La première condition n'est pas restrictive parce que, si $|a(p,f)|_p=1$ et $k\geq 2$, on peut toujours trouver un unique $f_0=f(z)-\alpha f(pz)$ (où $\alpha$ est la racine qui n'est pas une unité de $X^2-a(p,f)X+p^{k-1}\psi(p)$) de niveau $Np$, dont les coefficients de Fourier sont les mêmes pour $n$ pas divisible par $p$ et ordinaire, parce que $a(p,f_0)$ est l'autre racine de ce polynôme [Hid85, Lemma 3.3].

On a donc construit l'algèbre ordinaire pour $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et maintenant on veut faire la même chose pour $\overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$. Toujours sous l'hypothèse que $p|N$, on pose

$$\mathscr{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)=\varprojlim \mathscr{h}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K),$$

et toutes les propriétés qu'on a énoncé pour $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ sont encore vraies et en particulier

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) &= \overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N_0);\mathcal{O}_K)\\ \mathscr{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) &= \mathscr{h}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K).\end{aligned}$$

De la même façon on définit l'idempotent associé a $T_p$ $e$ pour $\mathscr{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$, tel qu'il coïncide avec la restriction de $e$ dans $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ sur $\overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$. De plus, $\mathscr{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ est le quotient de $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ par l'annulateur de $\overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$.
Maintenant on veut énoncer des résultats de dualité comme le théorème 1.2.2, mais avant il faut introduire un peu de notation

$$\begin{aligned}
\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) &= \left\{f \in \mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);K) : a(n,f) \in \mathcal{O}_K \text{ pour } n>0\right\} \\
&= K + \mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)/K, \\
\mathcal{M}_i^j(\Gamma_1(N);K) &= \bigoplus_{k=i}^{j} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);K) \\
\mathcal{M}_i^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) &= \left\{f \in \mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);K) : |a(n,f)|_p \leq 1 \text{ pour } n>0\right\} \\
\mathcal{M}_1^j(\Gamma_1(N);K) &= \mathcal{M}_1^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) \otimes K
\end{aligned}$$

et on définit comme d'abord, pour $A=\mathcal{O}_K$ ou $K$

$$(h,f)_A = a(1,f|h) \text{ pour } f \in \mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);A),\ h \in \mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);A)$$

De plus, puisque $(h,k)_K = 0$ pour tout $k$ dans $K$ on a que $\mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ agit fidèlement on $\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et on peut donc prouver le résultat [Hid86b, Proposition 2.1].

**Proposition 1.4.4.** *Pour $A = K$ ou $\mathcal{O}_K$ et $j>0$, $\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);A)$ (resp. $\mathcal{S}^j(\Gamma_1(N);A)$) est dual à $\mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);A)$ (resp. $\mathscr{h}^j(\Gamma_1(N);A)$). On a donc les isomorphismes suivants*

$$\begin{aligned}
Hom_A(\mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);A)) &\cong \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);A), \\
Hom_A(\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);A)) &\cong \mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);A), \\
Hom_A(\mathscr{h}^j(\Gamma_1(N);A)) &\cong \mathcal{S}^j(\Gamma_1(N);A), \\
Hom_A(\mathcal{S}^j(\Gamma_1(N);A)) &\cong \mathscr{h}^j(\Gamma_1(N);A).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* La preuve est la même que pour le théorème 1.2.2, mais parce que on ne l'a pas donné avant, on la donne maintenant pour $\mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);A)$ et $\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);A)$. Si $A = K$, il suffit de démontrer que l'accouplement est non-dégénéré, en raison du fait qu'il sont des espaces vectoriels de dimension fini. On a $(T_m,f) = a(m,f)$, donc si $(h,f)=0$ pour tout $h$, alors $a(m,f)=0$ pour $m>0$ et donc $f$ est constante, donc égale à 0. Si $(h,f)=0$ pour toute $f$, alors $a(m,f|h) = (T_m,f|h) = (h,f|T_m) = 0$ pour tout $m$, donc $f|h=0$ pour toute $f$ et puisque $\mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);K)$ agit fidèlement, $h=0$.
Pour le cas $A=\mathcal{O}_K$, pour $\phi$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K))$, on peut la prolonger sur $K$ et on l'appelle encore $\phi$. Pour le premier cas, il existe $f$ dans $\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);K)$ tel que $(T_m,f)=\phi(T_m)$. Mais $\phi(T_m)$ est dans $\mathcal{O}_K$, donc $f$ est dans $\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et cela nous donne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)) \cong \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)) \cong \mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ □

Si on introduit les séries d'Eisenstein $\mathbf{E}_k = -\frac{2k}{B_k}E_k$, on a, comme avant, pour $p \geq 5$,

$$|\mathbf{E}_{p^n(p-1)} - 1|_p \leq p^{-n-1}$$

et, puisque $\mathbf{E}_{p^n(p-1)}$ est dans $\mathcal{M}_{p^n(p-1)}(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Q})$, on a que la réunion

$$\bigcup_{j>i} \mathcal{M}_i^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$$

est dense dans $\mathcal{M}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et donc on a

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) = \varprojlim_j \mathcal{H}_i^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K). \tag{1.4.5}$$

Maintenant, on voudrait avoir pour $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et $\mathcal{M}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ des théorèmes de dualité comme ci-dessus. Posons $\mathbb{T} = K/\mathcal{O}_K$ et $\mathbb{T}_p = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et

$$\begin{aligned}
\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{T}) &= \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);K)/\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\\
\mathscr{m}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}) &= \mathscr{m}(\Gamma_1(N);K)/(\mathscr{m}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)+K) = \varinjlim_{j\to\infty} \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{T})\\
\mathcal{M}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}) &= \mathcal{M}(\Gamma_1(N);K)/\mathcal{M}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\\
\mathcal{S}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}) &= \mathcal{S}(\Gamma_1(N);K)/\mathcal{S}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)
\end{aligned}$$

et on munit $\mathscr{m}(\Gamma_1(N);\mathbb{T})$ et $\mathcal{S}(\Gamma_1(N);\mathbb{T})$ de la topologie discrète. On peut donc définir

$$\begin{array}{rccl}
(\,,\,)_{\mathbb{T}_p} & : & \mathcal{H}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)\times \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p) & \longrightarrow \quad \mathbb{T}_p\\
 & & (h,\overline{f})_{\mathbb{T}_p} & \longmapsto \quad (h,f)_{\mathbb{Q}_p} \bmod \mathbb{T}_p
\end{array}$$

avec $f$ dans $\mathcal{M}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{Q}_p)$ qui est réduit à $\overline{f}$ dans $\mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)$ et cet accouplement induit

$$(\,,\,)_{\mathbb{T}_p} : \mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)\times \mathscr{m}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p) \longrightarrow \mathbb{T}_p.$$

**Théorème 1.4.6.** *Si $p \geq 5$, alors $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$ et $\mathscr{m}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)$ (respectivement $\mathscr{h}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$ et $\mathcal{S}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)$ ) sont mutuellement compact-discrète duales au sens de Pontrjagin ([Wei40, §28], i.e. le dual d'un compact est discret et vicevers) sous l'accouplement $(\,,\,)_{\mathbb{T}_p}$.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{H}^j = \mathcal{H}_1^j(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$. On sait que $\mathcal{H}^j$ est libre sur $\mathbb{Z}_p$, donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^j,-)$ est exact et il envoie

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{T}_p \to 0$$

dans

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^j,\mathbb{Z}_p) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^j,\mathbb{Q}_p) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^j,\mathbb{T}_p) & \to & 0\\
 & & \alpha\uparrow & & \beta\uparrow & & \gamma\uparrow & & \\
0 & \to & \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p) & \to & \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{Q}_p) & \to & \mathscr{m}^j(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p) & \to & 0
\end{array}$$

et, puisque $\alpha$ et $\beta$ sont des isomorphismes par la proposition 1.4.4 (un morphisme de $\mathcal{H}^j$ vers $\mathbb{Q}_p$ est $\mathbb{Z}_p$ linéaire si et seulement si il est $\mathbb{Q}_p$ linéaire), alors $\gamma$ est un isomorphisme aussi. Puisque

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim \mathcal{H}^j,-) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^j,-),$$

en prenant la limite, la suite reste exacte et donc on a, avec 1.4.5

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}(G_1(N);\mathbb{Z}_p),\mathbb{T}_p)) \cong \mathscr{m}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p).$$

□

Avec ce théorème, on voit que $m(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p) = m(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{T}_p)$. De plus, par la formule suivante

$$(h, f|h')_{\mathbb{T}_p} = (hh', f)_{\mathbb{T}_p} \text{ pour } f \in m(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p),\ h, h' \in \mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$$

et la définition de $e$, on a le corollaire suivant [Hid86b, Corollary 2.3].

**Corollaire 1.4.7.** *Pour l'idempotent e associé à $T_p$ et $p \geq 5$, on a que $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$ et $m^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)$ sont mutuellement compact-discrète duales (resp. $h^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{Z}_p)$ et $\mathcal{S}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)$) sous l'accouplement $(,)_{\mathbb{T}_p}$*

## 1.5 Rang de $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et modules de congruences

On définit

$$\Gamma = \Gamma_1 = 1 + p\mathbb{Z}_p,\ \Gamma_n = 1 + p^n\mathbb{Z}_p$$

comme sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^\times$. Pour toute extension finie $K$ de $\mathbb{Q}_p$, on définit l'algèbre d'Iwasawa

$$\Lambda_K = \varprojlim_n \mathcal{O}_K[\Gamma/\Gamma_n]$$

qui peut être identifié avec $\mathcal{O}_K[[X]]$ en envoyant le générateur topologique de $\Gamma$ $1 + p$ dans $X$. Pour $K = \mathbb{Q}_p$, on pose $\Lambda_{\mathbb{Q}_p} = \Lambda$.

Soit $N = N_0p^r$, avec $(N_0, p) = 1$. On a déjà vu l'action de $Z_{N_0}$ dans laquel on plonge $\Gamma$. Si $f$ est dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);K)$, on peut l'écrire comme somme des $f_k$, formes modulaires de poids $k$ et l'action de $z$ dans $\mathbb{Z}_p^\times$ sur $f$ est

$$f|z = \sum_k z^k f_k|\gamma \tag{1.5.1}$$

où $\gamma \equiv \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \bmod p^r$ et $\gamma \equiv 1 \bmod N_0$. Soit $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N);K)$ et soit $n$ tel que $p^n f_k$ soit $\mathcal{O}_K$ entière pour tout $k$ et donc, pour $z$ dans $\Gamma_m$, avec $m \geq r, n$, on a

$$|f|z - f|_p = |\sum_k (z^k - 1)f_k|_p \leq p^{n-m}.$$

Donc $\overline{f}$ dans $\mathcal{M}(\Gamma_1(N);K/\mathcal{O}_K)$ est $\Gamma_m$-invariant et donc $\mathcal{M}(\Gamma_1(N);K/\mathcal{O}_K)$, $m(\Gamma_1(N);K/\mathcal{O}_K)$ et $\mathcal{S}(\Gamma_1(N);K/\mathcal{O}_K)$ sont la réunion des $\Gamma_m$-invariants et donc on peut les munir d'une $\Lambda_K$-action continue et par le théorème 1.4.6, on peut équiper $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et $h(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ d'une action continue de $\Lambda_K$ et cette action est compatible avec leur structure d'anneau. Si $l \equiv 1 \bmod N$, alors l'action de $l$, vu comme élément de $\mathbb{Z}_p^\times$, coïncide avec l'action de $\langle l \rangle$ et ces $l$ sont denses dans $\mathbb{Z}_p^\times$.

Soit $\mu$ l'ensemble des racines $p-1$-ièmes de l'unité dans $\mathbb{Z}_p$. Il agit sur $\mathcal{H}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ comme on l'a dit et on peut décomposer l'algèbre de Hecke en parties invariantes par $\mu$. En particulier, pour la partie ordinaire

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N), a;\mathcal{O}_K), \\
h^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K) &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} h^{ord}(\Gamma_1(N), a;\mathcal{O}_K)
\end{aligned}$$

où l'action de $\mu$ sur la partie correspondante à $a$ est donnée par $\zeta \mapsto \zeta^a$. Pour $A = K$ ou $\mathcal{O}_K$, on a à chaque niveau

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0p); A) &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0p), a; A), \\
\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N_0p); A) &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N_0p), a; A), \\
\mathcal{H}_k(\Gamma_1(N); A) &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} \mathcal{H}_k(\Gamma_1(N), a; A), \\
h_k(\Gamma_1(N); A) &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} h_k(\Gamma_1(N), a; A).
\end{aligned}$$

Posons $\Phi = \Gamma_0(p) \cap \Gamma_1(N_0)$ et soit $\omega$ le caractère de Teichmüller de $\mathbb{Z}_p$, qui envoit $z$ dans $\lim_{n\to\infty} z^{p^n}$, qui coïncide avec $\overline{z}$ mod $p$, si on regarde $\mathbb{F}_p^\times$ comme les racines $p-1$-ièmes de l'unité. On sait que

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0p), a; A) = \mathcal{M}_k(\Phi, \omega^{a-k}; A).$$

Le premier résultat qu'on veut démontrer est que le rang de $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ sur $\Lambda_K$ est fini et indépendant de $K$ et d'abord on démontrera que son rang est fini. On sait que l'action de $T_p$ peut changer si on change le niveau, en fait l'action de $T_p$ pour le niveau $N_0p$ et $N_0$ a l'expression suivante

$$\begin{aligned}
a(n, f|T_p^{N_0}) &= a(np, f) + p^{k-1}a(n/p, f|p) \\
a(n, f|T_p^{N_0p}) &= a(np, f)
\end{aligned}$$

mais, si $k \geq 2$, alors les actions sur $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p)$ de ces deux différents $T_p$ coïncident et donc on peut faire agir $\mathcal{H}(N_0p; \mathbb{Z}_p)$ sur cela. Puisque $\mathbf{E}_{p-1} \equiv 1 \bmod p\mathbb{Z}_p$, la multiplication par $\mathbf{E}_{p-1}$ donne un isomorphisme (de $\mathcal{H}(N_0p; \mathbb{Z}_p)$-modules) de $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p)$ et $\mathcal{M}_{k+p-1}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p)$. Pour $a$ dans $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, on fix $j(a)$, qui est compris entre 3 et $p-1$, tel que $j(a) \equiv a \bmod p-1$ et on pose

$$G_a(\mathbb{F}_p) = \varinjlim \mathcal{M}_{k+n(p-1)}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p),$$

où les flèches de transition sont données par la multiplication par $\mathbf{E}_{p-1}$. On identifie donc les formes modulaires de différent poids mais égale $q$-expansion dans $\mathbb{F}_p$. On a donc, avec la même notation que celle du théorème 1.4.1

$$G(\Gamma_1(N_0; \mathbb{F}_p))/(\mathbf{E}_{p-1} - 1) \cong \bigoplus_{a=0}^{p-2} G_a(\mathbb{F}_p)$$

comme $\mathcal{H}(N_0p; \mathbb{Z}_p)$-modules. Hida dans [Hid86b, Lemma 4.1] donne le lemme suivant, dû à Jochonowitz [Joc82, Lemma 1.9].

**Lemme 1.5.2.** *Si $k \geq 3$ and $p \geq 5$, alors $T_p$ annule les quotients*

$$\mathcal{M}_{k+p-1}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p)/\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p),\ \mathcal{S}_{k+p-1}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p)/\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p).$$

On définit, pour tout $\Lambda$-modules $M$

$$M[p^r] = \{m \in M : p^r m = 0\} \text{ et } M^\Gamma \, \{m \in M : \gamma m = m \forall \gamma \in \Gamma\}$$

et soient $\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)$, $\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{F}_p)$, $\mathcal{S}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)$ et $\mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{F}_p)$ les parties ordinaires des $\mathcal{H}(N_0 p; \mathbb{Z}_p)$-modules correspondantes.

**Théorème 1.5.3.** *Si $p \geq 5$, alors on a des isomorphismes de $\mathcal{H}(N_0 p; \mathbb{Z}_p)$-modules qui préservent la q-expansion*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)^\Gamma &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} \mathcal{M}_{j(a)}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{F}_p) \\
\mathcal{S}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)^\Gamma &= \bigoplus_{a=0}^{p-2} \mathcal{S}_{j(a)}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{F}_p).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* D'abord, par la multiplication par $p$, on a l'isomorphisme

$$\mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)[p] \cong \mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{F}_p$$

En se rappelant que deux formes modualires $p$-adiques qui sont proches ont la même réduction mod$p$, par le corollaire 1.4.2 on a

$$(\mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{F}_p)^\Gamma \cong W(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p) \cong \bigoplus_{a=0}^{p-2} G_a(\mathbb{F}_p).$$

Donc, par le lemme, la partie ordinaire de $G_a(\mathbb{F}_p)$ correspond à la partie ordinaire de $\mathcal{M}_{j(a)}(\Gamma_1(N); \mathbb{F}_p)$ et le théorème est montré en appliquant $e$. Pour les formes paraboliques, avec la même preuve on a le résultat. $\square$

**Corollaire 1.5.4.** *Si $p \geq 5$, alors $\mathcal{H}(\Gamma_1(N_0 p); \mathcal{O}_K)$ et $\hbar(\Gamma_1(N_0 p); \mathcal{O}_K)$ sont finis sur $\Lambda_K$ et de plus*

$$\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0 p); \mathcal{O}_K) = \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0 p); \mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{O}_K \text{ et } \hbar^{ord}(\Gamma_1(N_0 p); \mathcal{O}_K) = \hbar^{ord}(\Gamma_1(N_0 p); \mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{O}_K$$

*Démonstration.* On commence avec $\mathbb{Z}_p$. On a la suite exacte

$$0 \to \mathbb{T}_p \to \mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p) \to m(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p) \to 0$$

qui devient

$$0 \to \mathbb{T}_p \to \mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p) \to m^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p) \to 0$$

parce que $T_p$ agit trivialement sur les constantes. Soit $M$ le dual de Pontrajagin de $\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)$, on a par le théorème 1.4.6

$$0 \to \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0 p); \mathcal{O}_K) \to M \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

où $\Gamma$ agit trivialement sur $\mathbb{Z}_p$. Pour $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\Lambda$, on a, par définition, que $M/\mathfrak{m}M$ est l'espace dual à $(\mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}_p)[p])^\Gamma$, qui a un nombre fini d'éléments par le théorème ci-dessus. Puisque $M$ est un module continu (pour la topologie

$\mathfrak{m}$-adique) sur un anneau compact, il est fini sur $\Lambda$. Comme on l'a déjà dit, $\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)$ est le réunion de $\Gamma_m$-invariant, tous de torsion, donc

$$\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)=\bigcup_j \mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathbb{T}_p)[\mathfrak{m}^j]$$

et, par dualité, on obtient

$$M=\varprojlim \frac{M}{\mathfrak{m}^j M}.$$

Donc, puisque $M$ est la limite projective des modules finis, il est de type fini sur $\Lambda$ et par noetherianite de $\Lambda$, $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{Z}_p)$, sous-module de $M$, est de type fini et $\hbar^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{Z}_p)$, quotient de $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{Z}_p)$ l'est. Pour $\mathcal{O}_k$ général, $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$ est la partie ordinaire de $\mathcal{H}(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{Z}_p)\otimes\mathcal{O}_K$ que par finitude est $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{Z}_p)\otimes\mathcal{O}_K$, qui est fini sur $\Lambda_K$. □

On peut donc démontrer un théorème très précis sur le rang de $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$

**Théorème 1.5.5.** *Soit $p\geq 5$ et $N=N_0p$. Alors les parties ordinaires $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$ et $\hbar^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$ sont libres de rang fini sur $\Lambda_K$. Plus précisément*

$$\begin{aligned} rang_{\Lambda_K}(\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p),a;\mathcal{O}_K)) &= rang_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{M}^{ord}_{j(a)}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p)\\ rang_{\Lambda_K}(\hbar^{ord}(\Gamma_1(N_0p),a;\mathcal{O}_K)) &= rang_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{S}^{ord}_{j(a)}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p).\end{aligned}$$

*Démonstration.* Il suffira de démontrer le théorème pour $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}_p$ et puis d'appliquer le corollaire 1.5.4. On commence avec les formes modulaires ; comme on l'a déjà fait auparavant, on décompose $\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{T}_p)$ en espaces propres pour l'action de $\mu$

$$\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{T}_p)=\bigoplus_{a=0}^{p-2}\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0),a;\mathbb{T}_p).$$

Explicitement, on a

$$\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0),a;\mathbb{T}_p)=\left\{f\in\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{T}_p): f|\zeta=\zeta^a f \text{ pour } \zeta\in\mu\right\}.$$

On pose $\mathcal{M}=\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{T}_p)$ et $\mathcal{M}(a)=\mathcal{M}^{ord}(\Gamma_1(N_0),a;\mathbb{T}_p)$. Par le théorème 1.5.3 et comme $f|z=\sum_k z^k f|\gamma$ (1.5.1), on a

$$(\mathcal{M}(a)[p])^{\Gamma}=\mathcal{M}^{ord}_{j(a)}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{F}_p).$$

Posons

$$\mathcal{M}_k=\left\{f\in\mathcal{M}: f|z=z^k f\forall z\in\mathbb{Z}_p^{\times}\right\}$$

et donc on a, si $k\equiv a \bmod p-1$, puisque le fait que $z$ soit dans $\Gamma$ implique $z^k\equiv 1 \bmod p$, pour la partie de $p$-torsion

$$\mathcal{M}_k[p]\hookrightarrow(\mathcal{M}(a)[p])^{\Gamma}\cong\mathcal{M}^{ord}_{j(a)}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{F}_p).$$

Naturellement, $\mathcal{M}_k^{'}=\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Q}_p)/\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0);\mathbb{Z}_p)$, les formes modulaires de poids $k$, ordinaires, dans $\mathbb{T}_p$ sont dans $\mathcal{M}_k$. Par multiplication par $p$ et par le lemme 1.5.2, on a

$$\mathcal{M}_k^{'}[p]\cong\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0;\mathbb{F}_p))\cong\mathcal{M}^{ord}_{j(a)}(\Gamma_1(N_0;\mathbb{F}_p)),$$

et donc on a, par double inclusion, que $\mathcal{M}_k[p]$ et $\mathcal{M}_k^{'}[p]$ coïncident et on peut prouver le même résultat pour les parties de $p^n$-torsion. Vu que $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{M}_k^{'}$ sont $p$-divisibles et ont la même $p$-torsion, il coïncident. On a donc prouvé que les formes modulaires dans $\mathcal{M}$ qui se transforment comme une forme modulaire de poids $k$ correspond à formes modulaires de poids $k$ ordinaires, donc

$$\mathcal{M}_k \cong \mathbb{T}_p^r \text{ pour } r = r(a) = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{Z}_p).$$

On fixe $a$ et soit $M(a)$ le dual de Pontrjagin de $\mathcal{M}(a)$ et on a

$$0 \to \mathrm{Ker} \to \Lambda^r \to M(a) \to 0$$

puisque $\mathcal{M}_k$ est dans $\mathcal{M}(a)$. Soit $P_k = (1+X) - (1+p)^k$, qui est dans $\Lambda$ pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}$. Pour $k \geq 3$, $k \equiv a \bmod p-1$, on a une surjection (le produit tensoriel est exact à droite) de $\Lambda^r/P_k\Lambda^r$ vers $M(a)/P_kM(a)$, qui est le dual de $\mathcal{M}_k$ et tous les deux sont isomorphes à $\mathbb{Z}_p^r$. Donc, Ker est dans l'intersection de $P_k\Lambda^r$, pour $k \geq 3$, $k \equiv a \bmod p-1$, qui est 0 parce que les $P_k$ sont premiers entre eux. Donc $M(a)$ est libre de rang $r$. Puisque $\mathbb{Z}_p^\times$ agit trivialement sur $\mathbb{Z}_p$, les formes modulaire de poids 0 sur $\Gamma_1(N_0)$(i.e, le fonctions holomorphes sur $X_1(N_0)$, avec coefficients de Fourier dans $\mathbb{Z}_p$), si $a \neq 0$,

$$\mathcal{M}(a) = m^{ord}(\Gamma_1(N_0), a; \mathbb{T}_p) = \left\{ f \in m^{ord}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{T}_p) : f|\zeta = \zeta^a f \forall \zeta \in \mu \right\},$$

et, par dualité, on a que $\mathcal{H}^{ord}(N_0p, a; \mathbb{Z}_p)$ est libre de rang $r$.
Soit $a = 0$, on a

$$0 \to \mathbb{T}_p \to \mathcal{M}(0) \to m^{ord}(\Gamma_1(N_0), 0; \mathbb{T}_p) \to 0$$

et, par dualité,

$$0 \to \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p), 0; \mathbb{Z}_p) \to M(0) \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

et si on tensorise par $\Lambda/X\Lambda$, on obtient une surjection de $\mathbb{Z}_p^r$ vers $\mathbb{Z}_p$ et on choisit une base $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r)$ telle que cette surjection soit la projection sur le premier facteur. On relève cette base à $(e_1, \ldots, e_n)$, $n$ vecteurs libres dans $\Lambda^r \cong M(0)$, qui forment une base parce que $\sum_{i=1}^r \Lambda e_i$ est complète et dense. Donc $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p), 0; \mathbb{Z}_p) \cong \Lambda^{r-1} \oplus X\Lambda$, parce qu'il est le noyau de la flèche de $M(0)$ vers $\mathbb{Z}_p$.
La même preuve donne le résultat pour les formes paraboliques. □

On a ensuite le corollaire qui nous prépare au fait que les formes ordinaires sont classiques formes modulaires dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$, si $k$ est plus grand que 3 ou 2.

**Corollaire 1.5.6.** *Pour $P_k = 1 + X - (1+p)^k$ et $k \geq j(a)$ ($k \geq 2$), on a les isomorphismes suivants*

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p), a; \mathcal{O}_K)}{P_k\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p), a; \mathcal{O}_K)} &\cong \mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p), a; \mathcal{O}_K) \\ \frac{h^{ord}(\Gamma_1(N_0p), a; \mathcal{O}_K)}{P_k h^{ord}(\Gamma_1(N_0p), a; \mathcal{O}_K)} &\cong h_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p), a; \mathcal{O}_K). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme toujours, on démontre le théorème pour $\mathbb{Z}_p$ et puis pour $\mathcal{O}_K$ on étend les scalaires. On pose

$$\mathcal{M}_k(a) = \left\{ f \in \mathcal{M}(a) : f|z = z^k f \ \forall z \in \Gamma \right\}$$

qu'on peut définir aussi comme

$$\mathcal{M}_k(a) = \{ f \in \mathcal{M}(a) : f|P_k = 0 \}$$

en raison du fait que $1+p$ est le générateur de $\Gamma$. Avec la même notation qu'auparavant, $\mathcal{M}_k(a) = \mathcal{M}_k$ si $k \equiv a \bmod p-1$ et $k \geq j(a)$ ; son dual $M(a)/P_k M(a) = \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0 p), a; \mathcal{O}_K)/P_k \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0 p), a; \mathcal{O}_K)$ est le dual de $m_k^{ord}(\Gamma_1(N), a; \mathbb{Z}_p)$ qui est $\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N), a; \mathbb{Z}_p)$, donc soit $a \not\equiv k \bmod p-1$. On définit

$$\mathcal{M}_k^{'}(a) = \mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N), a; \mathbb{Q}_p)/\mathcal{M}_k^{ord}(\Gamma_1(N), a; \mathbb{Z}_p)$$

qui se plonge dans $\mathcal{M}_k(a)$. Il faut noter que $f$ dans $\mathcal{M}_k^{'}(a)$ se transforme sur $\Phi$ par $\omega^{a-k}$. En raison du fait que le dual de $\mathcal{M}_k^{'}$ est $\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0 p), a; \mathcal{O}_K)$ et que $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0 p), a; \mathcal{O}_K)/P_k \mathcal{H}^{ord}(N_0 p, a; \mathcal{O}_K)$ est, par le théorème précédant, le dual de $\mathcal{M}_k(a)$, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_k{}'(a) = \mathcal{M}_k(a)$. Toujours par le théorème précédent, rang$\mathcal{M}_k(a) = r(a)$ et soit

$$\mathbf{E}_t^{'} = -\frac{2t}{B_{t,\omega^{-t}}} E_t(\omega^{-t})$$

avec $B_{t,\omega^{-t}}$ le nombre de Bernoulli généralisé. Si $t \not\equiv 0 \bmod p-1$, alors $\mathbf{E}_t \equiv 1 \bmod p$. On a que $\mathbf{E}_{k-j(a)}^{'}$ définit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{j(a)}^{'}(a)[p] (= \mathcal{M}_{j(a)}[p])$ et $\mathcal{M}_k^{'}(a)[p]$ et donc on a que la dimension de $\mathcal{M}_k^{'}(a)[p]$ sur $\mathbb{F}_p$ est $r(a)$ et donc son rang est plus grand que $r(a)$.
Pour les formes paraboliques, avec la même notation, il faut prouver que

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{S}_k^{'}(a)[p]) \geq \dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{S}_{j(a)}^{ord}(\Gamma_1(N_0); \mathbb{F}_p) = s(a)$$

pour $\mathcal{S}_k^{'}(a) = \mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_1(N), a; \mathbb{Q}_p)/\mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_1(N), a; \mathbb{Z}_p)$
On sait grâce à [Hid81, Proposition 6.2], que

$$s(a) = \dim_{F_p}(\mathcal{S}_2^{'}(a)[p])$$

et, en mulpliant par $\mathbf{E}_{k-2}^{'}$, si $k \not\equiv 2 \bmod p-1$, ou par $\mathbf{E}_{p-1}^{n}$ si $k \equiv 2 \bmod p-1$, où $n = (k-2)/(p-1)$, on a une injection de $\mathcal{S}_2^{'}(a)[p]$ dans $\mathcal{S}_k^{'}(a)[p]$ et donc ceci prouve que

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{S}_k^{'}(a)[p]) \geq s(a)$$

□

On a donc démontré que l'algèbre de Hecke ordinaire $\mathcal{H}^{ord}(N_0 p, a; \mathcal{O}_K)$ est une somme directe des anneaux locaux, libres sur $\Lambda_K$ et que quand on prend le quotient par $P_k$ (on évalue $X$ dans $(1-p)^k - 1$), on obtient les anneaux locaux de l'algèbre de Hecke classique. Un cas très facile à comprendre et qui est très important (les formes modulaires $\Lambda$-adiques de Wiles), est le suivant : un anneau local est isomorphe à $\Lambda_K$ et donc à chaque $T_n$ on associe $A(n, X)$ dans $\Lambda_K$ et, par évaluation de $X$ sur $x$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on a un morphisme de l'algèbre de Hecke.

Si on choisit $x = (1-p)^k - 1$ ($k$ plus grand que $j(a)$), on a par le corollaire un morphisme de l'algèbre de Hecke de niveau $k$ et on sait, par dualité, qui correspond à une forme modulaire, qui est une forme propre pour $T_n$. Donc

$$f(q, X) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n, X) q^n$$

par évaluation de $X$ sur $(1-p)^k - 1$ on a des formes modulaires propres et ordinaires de poids $k$ !
On veut introduire, dans le contexte des algèbres de Hecke ordinaire, les formes nouvelles et donc on pose

$$\begin{array}{rcccc} [d] & : & \mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\Gamma_1(Nd); \mathcal{O}_K) \\ & & f = \sum_n a(n,f) q^n & \longmapsto & \sum_n a(n,f) q^{dn} \end{array}$$

qui coïncident sur les formes classiques avec $d^{1-k} f | \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z)$, comme on l'a défini précédentement. Comme il respecte les formes modulaires entières, il donne une injection de $\mathcal{M}(\Gamma_1(N); \mathbb{T})$ dans $\mathcal{M}(\Gamma_1(dN); \mathbb{T})$ et on pose donc

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}) &= \sum_{t | N_0} \mathfrak{m}(\Gamma_1(N/t); \mathbb{T}) | [t] + \sum_{t | N_0} \mathfrak{m}(\Gamma_1(N/t); \mathbb{T}) \\ \mathcal{O}_s(\Gamma_1(N); \mathbb{T}) &= \sum_{t | N_0} \mathcal{S}(\Gamma_1(N/t); \mathbb{T}) | [t] + \sum_{t | N_0} \mathcal{S}(\Gamma_1(N/t); \mathbb{T}) \end{aligned}$$

et l'action de $T_p$ sur cet espace est bien définie, parce que $t$ est premier avec $p$ et on définit ensuite la partie ordinaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}) & \subset & \mathfrak{m}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}) \\ \mathcal{O}_s^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}) & \subset & \mathcal{S}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T}) \end{array}$$

**Définition 1.5.7.** *On définit les idéaux $\mathcal{P}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_k)$ et $\mathfrak{p}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ comme les annullateurs des $\mathcal{O}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T})$ dans $\mathcal{H}^{ord}(N_0 p, a; \mathcal{O}_K))$ et de $\mathcal{O}_s^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T})$ dans $\mathfrak{h}^{ord}(N_0 p; \mathcal{O}_K))$. Par le corollaire 1.4.2, $\mathcal{O}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T})$ et $\mathcal{O}_s^{ord}(\Gamma_1(N); \mathbb{T})$ sont indépendants de la puissance de $p$ qui divise $N$ et donc $\mathcal{P}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_k)$ et $\mathfrak{p}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ sont aussi indépendants.*

On a la caractérisation suivante [Hid86b, Corollary 3.3] ;

**Corollaire 1.5.8.** *L'intersection de $\mathcal{P}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_k)$ (resp. $\mathfrak{p}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$) avec le nilradical de $\mathcal{H}^{ord}(N_0 p, a; \mathcal{O}_K))$ (resp. $\mathfrak{h}^{ord}(N_0 p; \mathcal{O}_K))$) est null et $\mathcal{P}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_k)$ et $\mathfrak{p}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ sont libre (de rang fini) sur $\Lambda_K$.*

Il y a une relation entre ce théorème et les congruences des formes modulaires : on fixe $R$ une composante irréductible de $\mathcal{H}^{ord}(N_0 p, a; \mathcal{O}_K)$ et donc $R_k = R/P_k R$ est une composante irréductible de $\mathcal{H}_k^{ord}(N_0 p, a; \mathcal{O}_K)$. Soit $S = R \otimes K / \mathrm{Nil}(R \otimes K)$, qui est de dimension $d$ sur $K$. Par des considérations de Hida [Hid85, §3], on a exactement $d$ formes propres $\{f_i\}$ tel que, pour $e_k$ l'idempotent associé à $R_k$, on a $f_i | e_k = f_i$. Elles correspondent à $d$ morphismes $\mathcal{O}_K$-linéaires vers $\overline{\mathbb{Q}}_p$, qui satisfont, pour $\mathfrak{b}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$, une des propriétés suivantes :

1. $f_i \equiv f_j^\sigma \bmod \mathfrak{b}$ pour $\sigma$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ ;
2. $a(m, f_i) \equiv a(m, f_j) \bmod \mathfrak{b}$ pour $m \geq 1$.

De plus, $\{f_i\}$ est maximal entre les ensembles ayant cette propriété et, pour $\pi$ l'uniformisant de $\mathcal{O}_K$, on a que $R_k/\pi R_k$ est indépendant de $k$, parce il sont tous isomorphes à $R/\mathfrak{m}R$. Donc si 2 est satisfait pour $k'$, il est satisfait pour tout $k \geq j(a)$. Donc si $K$ est suffisamment grand pour contenir $a(m, f_j)$ pour tout $j$ et $m$, la deuxième condition est toujours vérifiée. Donc, une composante irréductible de l'algèbre de Hecke correspond à une famille maximale des formes propres avec les mêmes valeurs propres modulo $\mathfrak{b}$. Pour distinguer les différentes formes propres congrues modulo $\mathfrak{b}$, on introduit

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\Gamma_1(N); K) &= \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \otimes \mathcal{L}_K, \\ q = q(\Gamma_1(N); K) &= h^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \otimes \mathcal{L}_K, \\ \mathcal{P}(\Gamma_1(N); K) &= \mathcal{P}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \otimes \mathcal{L}_K, \\ p(\Gamma_1(N); K) &= p(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \otimes \mathcal{L}_K, \end{aligned}$$

pour $\mathcal{L}_K$ le corps des fractions de $\Lambda_K$. On a que $\mathcal{Q}$ et $q$ sont des algèbres artiniennes de dimension finie sur $\mathcal{L}_K$, donc somme directe des anneaux locaux ; $\mathcal{P}(\Gamma_1(N); K)$ et $p(\Gamma_1(N); K)$ sont réduits, donc ils sont des produits des extensions finies de $\mathcal{L}_K$.

**Définition 1.5.9.** *Un anneau local $\mathcal{K}$ de $\mathcal{Q}$ est primitif de niveau $N_0$ s'il est dans $\mathcal{P}(\Gamma_1(N); K)$. Si $\mathcal{K}$ est dans $q$, il est dit cuspidal ou parabolique. Si la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathcal{K}$ coïncide avec $K$, alors on dit que $\mathcal{K}$ est définit sur $K$.*

**Théorème 1.5.10.** *Pour toute extension finie $M$ de $K$, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\Gamma_1(N); M) &= \mathcal{Q}(\Gamma_1(N); K) \otimes_K M \\ q(\Gamma_1(N); M) &= q(\Gamma_1(N); K) \otimes_K M. \end{aligned}$$

*Si $\mathcal{K}$ est primitif et défini sur $K$, alors $\mathcal{K}_M = \mathcal{K} \otimes_K M$ est un corps et peut être vu comme une unique composante primitive de $\mathcal{Q}(\Gamma_1(N); M)$.*

*Démonstration.* On sait que $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_M) = \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$ et $\Lambda_M = \Lambda_K \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$ et donc la première propriété est directe suit. $\mathcal{K}_M$ est un corps parce que $\mathcal{K} \cap M = K$ et la deuxième propriété est deduit de la première. □

Pour un espace vectoriel $V$ sur $\mathcal{L}_K$, on considère $\mathcal{X}$ un réseau, qui est un $\Lambda_K$-sous-module qui engedre $V$ comme espace vectoriel. On pose

$$\widehat{\mathcal{X}} = \bigcap_{P : ht(P)=1} \mathcal{X}_P$$

qui est libre et il est appelé la clôture libre de $\mathcal{X}$. $\mathcal{X}/\widehat{\mathcal{X}}$ a un nombre fini d'éléments, il est pseudo-nul (il est annulé par les idéaux de hauteur égale à 1) et il est nul si et seulement si $\mathcal{X}$ est libre. Dans notre cas, $\mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ et $h^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ sont des réseaux dans $\mathcal{Q}$ et $q$. On note avec $\mathcal{H}$ et $h$ les algèbres de Hecke sur $\mathcal{O}_K$. Pour tout $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{Q}$ (resp. $q$), on décompose $\mathcal{Q} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{A}$ (resp.

$q = \mathcal{K} \oplus \mathcal{B}$) et on note $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ (resp. $\hbar(\mathcal{K})$ et $\hbar((B)))$ les projections de $\mathcal{H}$ (resp. $\hbar$) sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}$). On pose

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathcal{K}) \oplus \mathcal{H}(\mathcal{A}) \text{ et } \hbar' = \hbar(\mathcal{K}) \oplus \hbar(\mathcal{B})$$

et $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\hbar}$ leurs clôtures libres.

**Définition 1.5.11.** *On définit les $\Lambda_K$-modules suivants*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{K}; K) = \overline{\mathcal{H}}/\mathcal{H}, & \mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{K}; K) = \overline{\mathcal{H}}/\mathcal{H}', \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{K}; K) = \overline{\hbar}/\hbar, & \mathcal{N}_s = \mathcal{N}_s(\mathcal{K}; K) = \overline{\hbar}/\hbar'. \end{array}$$

**Théorème 1.5.12.** *Soit $\mathcal{R}$ l'anneau local de $\mathcal{H}$ (ou $\hbar$) tel que $\mathcal{R} \otimes \mathcal{L}_K \supset \mathcal{K}$. On suppose $\mathcal{K}$ parabolique si nécessaire. Alors on a*

*i) $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ sont des-$\Lambda_K$ modules finis et de torsion.*

*ii) Pour $\mathcal{K}$ défini sur $K$ et $M/K$ extension finie, on a*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(\mathcal{K}_M; M) & = & \mathcal{T}(\mathcal{K}; K) \otimes_{\Lambda_K} \Lambda_M, \\ \mathcal{C}(\mathcal{K}_M; M) & = & \mathcal{C}(\mathcal{K}; K) \otimes_{\Lambda_K} \Lambda_M. \end{array}$$

*iii) $\mathcal{T} = 0$ (resp. $\mathcal{C} = 0$) si et seulement si $\mathcal{R} \otimes \mathcal{L}_K = \mathcal{K}$.*

*iv) Les annulateurs de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ dans $\Lambda_K$ sont principaux.*

*v) $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_s$ sont pseudo-nulls.*

*Démonstration.* On démontre les résultats seulement pour $\mathcal{H}$, parce pour $\hbar$ la preuve est la même.

i) On sait que $\mathcal{Q}/\mathcal{H}$ est de torsion, donc $\mathcal{T}$ aussi. $\overline{\mathcal{H}}$ est un réseau libre et de rang fini pour le théorème 1.5.5, donc $\mathcal{T}$ est fini aussi.

ii) On pose comme avant $\mathcal{H}_M$, $\mathcal{H}_M(\mathcal{K}_M)$, $\mathcal{H}_M(\mathcal{A}_M)$ et $\overline{\mathcal{H}_M}$. On sait déjà que $\mathcal{H}_M = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$ et il suffit donc de montrer que $\overline{\mathcal{H}_M} = \overline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$. En fait, $\overline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M = \overline{\mathcal{H}} \otimes_{\Lambda_K} \Lambda_M$ est libre sur $\Lambda_M$ et

$$(\overline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M)/(\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M) = \mathcal{N}(\mathcal{K}; K) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$$

est pseudo-nul, donc il est la clôture libre de $(\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M)$ mais

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M & = & (\mathcal{H} \cap \mathcal{K}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M \\ & = & (\mathcal{H}_M \cap \mathcal{K}_M) \oplus (\mathcal{H}_M \cap \mathcal{A}_M) = \mathcal{H}'_M \end{array}$$

donc

$$\mathcal{T}(\mathcal{K}_M; M) = \overline{\mathcal{H}_M}/\mathcal{H}'_M = \mathcal{T}(\mathcal{K}; K) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$$

mais comme on l'a déjà remarqué dans le théorème 1.5.10, sur un $\Lambda_K$-module, $- \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_M$ et $- \otimes_{\Lambda_K} \Lambda_M$ donnent le même résultat.

iii) $\mathcal{T} = 0$ si et seulement si $\mathcal{H}(\mathcal{K}) = \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ est libre, mais $\mathcal{R} \otimes \mathcal{L}_K = \mathcal{K}$ implique $\mathcal{H}(\mathcal{K}) = \mathcal{R}$ qui est libre par le théorème 1.5.5.

iv) Pour cette partie, on aura besoin de beaucoup d'algèbre commutatif [Bou65, VII, §§1-4]. On appelle un réseau réflexif s'il coïncide avec son bidual. Pour $\mathfrak{a}$, idéal de $\Lambda_K$ on pose

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{x \in (\Lambda_K : \mathfrak{a})} x\Lambda_K$$

qui est un idéal qui contient $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a} = \mathrm{div}\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}$ est un diviseur de $\Lambda_K$. Un diviseur s'il est premier si est un idéal premier et les diviseurs premiers coïncident avec idéaux premiers de hauteur 1, qui sont principaux puisque $\Lambda_K$ est à factorisation unique. Tout diviseur peut être écrit comme produit des diviseurs premiers. Donc dans $\Lambda_K$ tous les diviseurs sont principaux. Soit $\mathfrak{a}$ l'annullateur de $\mathcal{T}$, on veut démontrer qu'il est un diviseur. Puisque $\mathrm{div}(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ est pseudo-null, $X = \mathrm{div}\mathfrak{a}\mathcal{T}$, l'est et il est inclus dans $\mathcal{Q}/\mathcal{H}$. Puisque $\mathcal{H}$ est réflexif (il est libre), les premiers associés à $\mathcal{Q}/\mathcal{H}$ sont des diviseurs, donc les premiers associés à $X$ sont de hauteur 1 et par pseudo-nullité, ils n'existent pas. Donc $X = 0$ et $div(\mathfrak{a})$ est dans l'annulateur de $\mathcal{T}$, $\mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{a} = div(\mathfrak{a})$.

v) $\mathcal{N}$ est pseudo-nul puisqu'il est la clôture libre d'un réseau quotienté par le réseau.

□

Pour une composante $\mathcal{K}$ de $\mathcal{Q}$, on a une projection naturelle de $\mathcal{H}$ vers $\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})$, la clôture libre de $\mathcal{H}(\mathcal{K})$, qui nous donne, en tensorisant par $\Lambda_K/P_k\Lambda_K$, un morphisme $\lambda_k$ de $\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p;\mathcal{O}_K))$ (par le corollaire 1.5.6) vers $\widehat{\mathcal{H}}_k(\mathcal{K}) = \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})/P_k\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})$.

**Définition 1.5.13.** *Une forme propre normalisée $f$ dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$ appartient à $\mathcal{K}$ si le morphisme $\lambda$ de $\mathcal{H}_k(\Gamma_1(N_0p))$ vers $\overline{\mathbb{Q}}_p$ se factorise par $\lambda_k$.*

Il faut que $f$ soit ordinaire, par exemple. On a donc le corollaire suivant

**Corollaire 1.5.14.** *On suppose $\mathcal{K}$ primitif et parabolique et soit $d = [\mathcal{K} : \mathcal{L}_K]$. Pour tout $k \geq 2$, $\widehat{\hbar}_k(\mathcal{K})$ se plonge dans $\hbar_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p;K))$ comme sous-algèbre et il y a exactement $d$ formes propres ordinaires qui appartient à $\mathcal{K}$, de conducteur divisible par $N_0$. Inversement, pour toute $f$ ordinaire dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N_0p))$, associée à une forme primitive de conducteur divisible par $N_0$, il existe un unique $\mathcal{K}$ primitif dans $\mathfrak{q}$ auquel $f$ appartient.*

*Démonstration.* Soit $L = \hbar \cap \mathcal{K}$, qui est un réseau réflexif et donc libre de $\Lambda_K$ (par un théorème de Serre, les $\Lambda_K$-réseaux réflexifs sont libres [Ser95, Lemma 2.2]). On a ensuite, en posant $P = P_k$, que $L/PL$ est plongé dans $L_P/PL_P$. On obtient donc

$$0 \to L_P \to \hbar_P \to \hbar_P/L_P \to 0$$

puisque $\hbar/L$ est sans torsion, sa localisation à $P$ est libre sur $\Lambda_P$ et puisque $L_P/PL_P$ (qui annule le formes vieux) est un idéal de $\hbar_P/P\hbar_P$, qui est un anneau artinien, il est donc semi-simple et $L_P$ doit coïncider avec $\hbar(\mathcal{K})_P$, puisqu'ils ont pour le corollaire (1.5.6) le même corps résiduel. Puisque $L_P/PL_P$ est semi-simple, alors $L_P = \hbar(\mathcal{K})_P$ est non-ramifié sur $\Lambda_P$ ($P$ engendre les anneaux locaux) et puisque $\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})$ est libre sur $\Lambda_K$, $\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})/P\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})$ est libre sur $\mathcal{O}_K$. Mais, puisque $\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{K})_P = \mathcal{H}(\mathcal{K})_P$ est non ramifié sur $P$, $L/PL$ est un $\mathcal{O}_K$ sous-module de $\widehat{\mathcal{H}}_k(\mathcal{K})$ avec le même rang et par localisation, on plonge $\widehat{\mathcal{H}}_k(\mathcal{K})$ dans $L_P/PL_P$. Mais

$$F_k = \widehat{\mathcal{H}}_k(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K = L_P/PL_P$$

est un sommant direct, par semi-simplicité, de $\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N);K)$. [Hid85, Proposition 4.4] nous assure qu'el existe $d = [F_k : K](= [\mathcal{K} : \mathcal{L}_K])$ formes primitives ordinaires de conducteur divisible par $N_0$. En effet, cette proposition 4.4 est la formulation, dans le langage des formes ordinaires du théorème 1.2.6, que nous sommes en train de reformuler dans le langage de composants primitifs et paraboliques. Pour l'autre sens, on démontrera cela indirectement, en calculant la dimension de $\mathfrak{q}(N_0p;K)$ sur $\mathcal{L}_K$ et de $\mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0);K)$ sur $K$. Pour $s$ et $t$ tels que $ts|N_0$, on pose

$$\begin{array}{cccc} [t]_s & : & \mathcal{S}^{ord}(\Gamma_1(sp);\mathbb{T}_K) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\Gamma_1(N_0p);\mathbb{T}_K) \\ & & f=\sum_n a(n,f)q^n & \longmapsto & \sum_n a(n,f)q^{tn} \end{array}$$

qui induit par dualité un morphisme

$$[t]_s : \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathcal{H}^{ord}(\Gamma_1(sp);\mathcal{O}_K),$$

et soit $\phi_{t,s}$ la composition de $[t]_s$ avec la projection de $\mathfrak{q}(sp;K)$ sur $\mathfrak{p}(sp;K)$. On définit donc

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathfrak{q}(N_0p;K) & \longrightarrow & \bigoplus_{t,s}\mathfrak{p}(sp;K) \\ & & h & \longmapsto & \sum_{t,s}\phi_{t,s}(h) \end{array}$$

Ce morphisme est injectif et, en posant $d(s)=\dim_{\mathcal{L}_K}\mathfrak{p}(sp;K)$, on obtient

$$\dim_{\mathcal{L}_K}\mathfrak{q}(sp;K)\leq\sum_{t|N_0}\tau(t)d(N_0/t)$$

pour $\tau$ qui compte les diviseurs positifs de $t$. Par la proposition 4.4 de [Hid85], on a

$$\dim_K\mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p);K)=\sum_{t|N_0}\tau(t)d_k(N_0/t)$$

où $d_k(N_0/t)$ est le nombre des formes propres ordinaires associées aux formes primitifes de conducteur divisible par $N_0/t$. On a donc $d_k(N_0/t)\geq d(N_0/t)$ par la première partie du corollaire, mais par le théorème 1.5.5, on

$$\dim_K\mathcal{S}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p);K)=\dim_{\mathcal{L}_K}\mathfrak{q}(N_0p;K)$$

qui nous permet de conclure et nous donne l'indépendance du nombre des formes ordinaires primitives de poids $k$. □

Maintenant, on va introduire les modules de congruences, qui sont une mesure des congruences modulo $p$ qu'une forme modulaire $f$ satisfait avec des autres formes modulaires. Soit comme précédemment

$$F_k=\widehat{\mathcal{H}}_k(\mathcal{K})\otimes_{\mathcal{O}_K}K=L_P/PL_P$$

et décompose

$$\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p);K)=F_k\oplus A_k$$

ou si $\mathcal{K}$ est parabolique,

$$\mathcal{h}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p);K)=F_k\oplus B_k$$

et soient $\mathcal{H}(F_k)$ et $\mathcal{H}(A_k)$ (resp. $\mathcal{h}(F_k)$ et $\mathcal{h}(B_k)$)les projections sur $F_k$ et $A_k$ (resp. $F_k$ et $B_k$) de $\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$ (resp. $\mathcal{h}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p);\mathcal{O}_K)$).

**Définition 1.5.15.** *On définit les $\mathcal{O}_K$-modules de $p^\infty$-torsion, pour $k \geq j(a)$, ou $k \geq 2$ pour le cas parabolique,*

$$\begin{aligned} T_k(\mathcal{K}) &= (\mathcal{H}(F_k) \oplus \mathcal{H}(A_k))/\mathcal{H}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p); \mathcal{O}_K), \\ C_k(\mathcal{K}) &= (\mathit{h}(F_k) \oplus \mathit{h}(B_k))/\mathit{h}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p); \mathcal{O}_K). \end{aligned}$$

Ils sont presque les fibres au poids $k$ de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$

**Corollaire 1.5.16.** *Si nécessaire, on considère $\mathcal{K}$ paraboliques. On a des suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_k(\mathcal{K}) & \to & \mathcal{T}(\mathcal{K}; K)/P_k\mathcal{T}(\mathcal{K}; K) & \to & \mathcal{N}(\mathcal{K}; K)/P_k\mathcal{N}(\mathcal{K}; K) & \to & 0 \\ 0 & \to & C_k(\mathcal{K}) & \to & \mathcal{C}(\mathcal{K}; K)/P_k\mathcal{C}(\mathcal{K}; K) & \to & \mathcal{N}_s(\mathcal{K}; K)/P_k\mathcal{N}_s(\mathcal{K}; K) & \to & 0 \end{array}$$

*pour $k \geq j(a)$ ($k \geq 2$).*

Pour expliquer le nom module de congruences, considérons le cas $[\mathcal{K} : \mathcal{L}_K] = 1$ et $\mathcal{K}$ parabolique, dans lequel cas $\mathit{h}(\mathcal{K}) = \Lambda_K$, puisque $\Lambda_K$ est intégralement clos dans $\mathcal{L}_K$ et soit $f(X)$ la forme $\Lambda$-adique comme avant. Posons $f_k = f((1+p)^k - 1)$, on a donc $\mathit{h}(F_k) = \mathcal{O}_K$ et cette projection correspond à $\lambda_k$, le morphisme associé à $f_k$. Supposons $\mathcal{N}_s = 0$ ; alors, par le théorème 1.5.12, $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\Lambda_K/H(X)\Lambda_K$ et par le corollaire $C_k(\mathcal{K})$ est $\mathcal{O}_K/H((1+p)^k - 1)\mathcal{O}_K$. On sait que pour $f_k = f((1+p)^k - 1)$ il y a un sommant direct, isomorphe à $\mathcal{O}_K$, dans $\mathit{h}(F_k)$, mais si le module de congruences n'est pas null, il existe un autre sommant direct, qui correspond à autres formes modulaires $g$, qui sont congruents à $f_k$ modulo $\omega_K^r$, pour $\omega_K$ uniformisant de $\mathcal{O}_K$ et $r$ la valuation $\omega_K$-adique de $H((1+p)^k - 1)$. Donc,

il existe une autre forme modulaire $g$ telle que $f_k \equiv g \bmod \mathfrak{b}$ si et seulement si $C_k(\mathcal{K})$ est non nul.

Si $\mathcal{N}_s = 0$, peut choisir $H$ tel que $H(P_k)$ correspond au dénominateur de l'idempotent de $F_k$. Après ce corollaire, on aimerait bien savoir quand $\mathcal{N}$ est nul. On se concentre sur le cas parabolique ; soit donc $\mathcal{R}$ l'anneau local de $\mathit{h}$ tel que $\mathcal{R} \otimes_{\Lambda_K} \mathcal{L}_K \supset \mathcal{K}$ et on décompose

$$\mathcal{R} \otimes_{\Lambda_K} \mathcal{L}_K = \mathcal{K} \oplus \mathcal{B}$$

et soient $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ les projections de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}$. Par définition $\mathcal{C}(\mathcal{K}; K) = \widehat{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \oplus \widehat{\mathcal{R}}(\mathcal{B})/\mathcal{R}$. Pour tout $k \geq 2$, $\mathcal{R}/P_k\mathcal{R}$ est un anneau local de $\mathit{h}_k^{ord}(\Gamma_1(N_0p)); \mathcal{O}_K$ et décompose

$$\mathcal{R}/P_k\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_K} K = F_k \oplus B_k$$

et pour $R(F_k)$ et $R(B_k)$ les projections de $\mathcal{R}/P_k\mathcal{R}$, on a, par définition,

$$C_k(\mathcal{K}) = (R(F_k) \oplus R(B_k))/\mathcal{R}/P_k\mathcal{R}$$

et on a la proposition suivante [Hid86b, Proposition 3.9]

**Proposition 1.5.17.** *Si une des conditions suivantes est satisfaite par $\mathcal{R}/P_k\mathcal{R}$ pour un $k \geq 2$, alors $\mathcal{N}_s = 0$.*

**i)** *$R(F_k) \oplus R(B_k)$ est intégralement clos dans $\mathcal{R}/P_k\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ ;*

**ii)** *$\mathcal{R}/P_k\mathcal{R} \cong Hom_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{R}/P_k\mathcal{R};\mathcal{O}_K)$ comme $\mathcal{R}/P_k\mathcal{R}$-module et $R(F_k)$. intégralement clos dans $F_k$*

Le même critère existe pour $\mathcal{K}$ non paraboliques. L'importance des modules de congruences est due au fait que l'annulateur de $\mathcal{C}(\mathcal{K};K)$, par exemple dans le cas d'une forme $\Lambda$-adique, donne une interpolation $p$-adique (d'une façon qu'on précisera par la suite) aux valeurs de la fonction $\mathcal{L}(s,f_k)$ imprimitif associé à le carré symétrique de $f_k$ qu'on définirai dans le troisième chapitre [Hid88a].

## 1.6 Encore sur composants primitifs et modules des congruences

Maintenant on utilise la définition alternative de $|_k\gamma$,

$$f|_k\gamma = \det(\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}f(\gamma(z)).$$

Jusqu'à présent, nous sommes concentrés sur les éléments $P_k$ dans $\Lambda_K$, mais on peut aussi considérer les $P_{k,\varepsilon} = (1+X) - \varepsilon(1+p)(1+p)^k$, pour $\varepsilon$ caractère d'ordre fini de $\Gamma$ (i.e. $\ker(\varepsilon) = \Gamma_r$) et, en faisant les bons changements, on peut démontrer les équivalents des corollaires 1.5.6, 1.5.14 et 1.5.16 [Hid86a, §1].
Plus précisément, soit maintenant $\mathcal{R}$, comme avant, une composant irréductible de $\hbar(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ et soit $\mathcal{I}$ sa clôture intégrale dans $\mathcal{K}$ et $\lambda$ la projection de $\hbar(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ sur $\mathcal{I}$.

**Définition 1.6.1.** *Pour un caractère $\psi$ de $\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z}$, on dit qu'une composante irréductible $\mathcal{K}$ de $q(\Gamma_1(Np);K)$, a caractère $\psi$ si $\mathcal{K}$ est dans la partie propre associé à $\psi$, $q(\Gamma_1(Np),\psi;K)$.*

On considère l'ensemble de $\overline{\mathbb{Q}}_p$-points du $\mathcal{O}_K$-schéma $\mathrm{Spec}(\mathcal{I})$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathcal{I}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_p) \\ \mathcal{A}(\mathcal{I}) &= \{P \in \mathcal{X}(\mathcal{I}) : P|_{\Lambda_K} = P_{k,\varepsilon},\ \varepsilon \text{ d'ordre fini }\} \end{aligned}$$

Les points du deuxième type sont appelés arithmétiques et pour tous $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, on note $k(P)$ et $\varepsilon_P$ le poids et le caractère des $P|\Lambda_K$ et avec $p^{r(P)-1}$ on désigne l'ordre de $\varepsilon_P$. On peut toujours choisir $K$ suffisamment grand, tel que $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ soit Zariski dense dans $\mathcal{X}(\mathcal{I})$. Pour exemple, si $d$ est le rang de $\mathcal{I}$ sur $\Lambda_K$, alors on peut substituer $K$ par l'extension de $K$ obtenue en composant toutes les extensions de degré plus petit ou égal à $d$ et on a que les points arithmétiques sont alors Zariski denses (ils sont infinis).
Puisque $\mathcal{I}$ est réduit, un élément de $\mathcal{I}$ est déterminé par ses valeurs sur les points arithmétiques. On a le suivant

**Théorème 1.6.2** (Théorème de contrôle de Hida)**.** *Pour tout $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ de poids $\geq 2$, on a*

$$\hbar(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\Lambda_K}\mathcal{I}/P \cong \hbar^{ord}_{k(P)}(\Phi^1_{r(P)},\varepsilon_P;\mathcal{O}_K)$$

*pour $\Phi^s_r = \Gamma_0(p^r)\cap\Gamma_1(Np^s)$.*

Si on compose $\lambda$ avec $P$, par le théorème de contrôle on a que

$$f_P = \sum_{n=1}^{\infty} P \circ \lambda(T(n))q^n$$

est une forme ordinaire, classique dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(Np^r), \psi\varepsilon_P\omega^{-k(P)})$ [Hid86a, Corollary 1.6]. On a la proposition suivante

**Proposition 1.6.3.** *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

**i)** *Il existe $P \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$ avec $k(P) \geq 2$, tel que $f_P$ est primitif de niveau $Np^{r(P)}$, $r(P) \geq 1$.*

**ii)** *Pour tout $P \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$ de poids $k(P) \geq 2$ et avec la $p$-partie de $\varepsilon_P\psi\omega^{-k(P)}$ non triviale, $f_P$ est primitive.*

Si une de ces conditions est vérifiée, alors $\lambda$ (ou $\mathcal{I}$) est dit primitif. Si $f_P$ est primitive et la $p$-partie de $\varepsilon_P\psi\omega^{-k(P)}$ est triviale, par la théorie de Atkin-Lehener, $|a(p, f_P)|_p = p^{-k/2+1}$, donc si $f_P$ est ordinaire, alors $k = 2$.
On définit un nouveau module de congruences $\mathbf{C}(\lambda) = \mathrm{coker}(\delta)$, pour

$$\delta : \hbar^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \otimes_{\Lambda_K} \mathcal{I} \rightarrow \hbar(\mathcal{K}) \oplus \hbar(\mathcal{B})$$

qui est plus petit de $\mathcal{C}(\mathcal{K}; K)$ si $\mathcal{R}$ ne coïncide pas avec $\mathcal{I}$. C ?est un $\mathcal{I}$-module de torsion et il est fini. Avec cette définition, on a que la deuxième condition de **ii)**, proposition 1.5.17 est toujours vérifiée et souvent son annuateur est principal [Hid88a, Theorem 0.1].
On introduit le tordu d'une forme modulaire pour un caractère. Soit $\chi$ un caractère de $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ et $f$ une forme modulaire dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'), \psi)$, on pose

$$f|\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)a(n, f)$$

et on sait que $f|\chi$ est dans $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'), \psi\chi^2)$, pour $N' = m.c.m.(M^2, N)$.
On peut donc définir

$$\begin{array}{cccc} [\chi] & : & \overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N'p); \mathcal{O}_K) \\ & & f & \longmapsto & f|\chi. \end{array}$$

Supposons maintenant que $\chi$ soit primitif de conducteur $M$ premier avec $p$. En utilisant les définitions de la première section, on a

$$\chi(l)[\chi]T_l = T_l[\chi]$$

pour tout $l$ premier. Puisque $\lim_{n\to\infty} \chi(p)^n = 1$, l'idempotent $e$ associé à $T_p$ commute avec $[\chi]$ et on peut donc considérer

$$[\chi] \quad : \quad \overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \quad \longrightarrow \quad \overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N'p); \mathcal{O}_K)$$

et soit $\overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)|[\chi]$ l'image de $[\chi]$ et $\hbar_\chi^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ la $\Lambda_K$ sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\Lambda_K}(\overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)|[\chi])$ engendrée par $T_n$, $n$ positif. Par $\mathcal{O}_K$-dualité entre les formes paraboliques et leurs algèbres de Hecke, on peut définir

$$\chi^* \quad : \quad \hbar_\chi^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K) \quad \longrightarrow \quad \hbar^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$$

qui envoie $T_l$ dans $\chi(l)T_l$. Si on définit $\hbar_t^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ comme la $\Lambda_K$-sous-algèbre de $\hbar^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$ engendre par $T_l$ avec $(l,t)=1$, on a que l'image de $\chi^*$ est dans $\hbar_{C(\chi)}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$. Pour tout morphisme primitif $\lambda$ (associé à $\mathcal{I}$) et $\chi$ caractère primitifs de conducteur premier avec $p$, on pose

$$\begin{array}{rcllll} \lambda' & : & \hbar^{ord}(\Gamma_1(N');\mathcal{O}_K)\otimes_{\Lambda_K}\mathcal{I} & \xrightarrow{\text{res}} & \hbar_\chi^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\Lambda_K}\mathcal{I} & \xrightarrow{\chi^*} \\ & & \hbar_{C(\chi)}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\Lambda_K}\mathcal{I} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{I}. & \end{array}$$

Cet morphisme peut ne pas être primitif, mais il existe un unique morphisme primitif associé à $\lambda'$. Soit $C(\lambda')$ le conducteur du morphisme primitif associé.

**Définition 1.6.4.** *On définit*

$$\lambda\otimes\chi : \hbar^{ord}(C(\lambda');\mathcal{O}_K)\otimes_{\Lambda_K} \longrightarrow \mathcal{I}$$

*comme le morphisme primitif associé à $\lambda'$ et on l'appelle le tordu de $\lambda$ par $\chi$.*

On a l'important théorème suivant

**Théorème 1.6.5.** *Soit $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, $k(P)\geq 2$, $\lambda$ le $\mathcal{I}$-morphisme associé. Soit $\psi$ le caractère de $\mathcal{I}$, $\chi$ un caractère primitif de conducteur premier avec p et $\lambda\otimes\chi$ le tordu de $\lambda$ par $\chi$. Pour $f_P$ et $g_P$ les formes modulaires associées à $\lambda$ et $\lambda\otimes\chi$, $\varepsilon_P\psi_P\omega^{-k(P)}$ la p-partie du caractère de $f_P$ on a*

$$\begin{array}{c} g_P = (f_P|\chi)^0 \text{ si } \varepsilon_P\psi_P\omega^{-k(P)} \text{ est non trivial} \\ g_P^0 = (f_P|\chi)^0 \text{ si } \varepsilon_P\psi_P\omega^{-k(P)} \text{ est trivial} \end{array}$$

*Démonstration.* Par définition

$$g_P|T_n = \chi(n)a(n,f_P)g_P \text{ pour } n \text{ prime to } NC(\chi)$$

Soit $\psi'$ le caractère de $\lambda\otimes\chi$, on veut démontrer que $\psi'=\psi\chi^2$ ; par définition de $T_{l^2}$, $l$ premier qui ne divise pas $NC(\chi)$, on a

$$\begin{array}{rcl} g_P|(T_l^2-T_{l^2}) & = & l^{k-1}\varepsilon_P\psi'\omega^{-k(P)}(l)g_P \\ f_P|(T_l^2-T_{l^2}) & = & l^{k-1}\varepsilon_P\psi\omega^{-k(P)}(l)f_P \end{array}$$

qui, combiné avec la premier formule de la preuve, nous donne $\psi'=\psi\chi^2$. Puisque on impose que $\lambda\otimes\chi$ soit primitif, par la proposition 1.6.3, si $\varepsilon_P\psi_P\omega^{-k(P)}$ est non trivial, on à la première égalité. Si $\varepsilon_P\psi_P\omega^{-k(P)}$ est trivial, la deuxième égalité est vrai par la définition du tordu et de forme primitive associée. □

La dernière propriété que nous intéresse est la minimalité d'un forme modulaire ; $f$ est minimal si $C(f)\leq C(f|\chi)$ pour tout $\chi$, caractère de Dirichlet et $f$ est $p$-minimal si $C(f)\leq C(f|\chi)$ pour tout $\chi$, caractère de Dirichlet définit modulo une puissance de $p$. On a donc le corollaire suivant [Hid88a, Corollary 7.10].

**Corollaire 1.6.6.** *Avec les mêmes hypothèses que celles du théorème 1.6.5, si $f_P^0$ est minimal pour un $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, $k(P)\geq 2$, alors $f_Q^0$ est minimal pour tout $Q$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, $k(Q)\geq 2$.*

Ce qui nous permet de donner la définition suivante

**Définition 1.6.7.** *Soit* $\lambda : \mathfrak{h}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes_{\Lambda_K}\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ *primitif.* $\lambda$ *est minimal si pour un* $P$ *dans* $\mathcal{A}(\mathcal{I})$*,* $k(P)\geq 2$*,* $f_P$ *est minimal.*

On termine en définissant le morphisme $l_P$ qu'on utilisera pour construire la fonction $L$ en deux variables dans le dernier chapitre. On commence avec la proposition suivante [Hid88b, §7].

**Proposition 1.6.8.** *Soit* $\widehat{\mathcal{I}} = Hom_{\Lambda_K}(\mathcal{I},\Lambda_K)$*. On a des isomorphismes canoniques de* $\mathfrak{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$*-modules et* $\mathfrak{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes\mathcal{I}$*-modules*

$$Hom_{\Lambda_K}(\overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K);\Lambda_K^*)\cong\mathfrak{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)$$

$$Hom_{\mathcal{O}_K}(\overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes\widehat{\mathcal{I}};\mathcal{O}_K)\cong\mathfrak{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes\mathcal{I}$$

*qui sont donnés par les accouplements suivants :*

$$\langle h,f\rangle(\gamma)=a(1,f|h\gamma);(h\otimes i,f\otimes\phi)=\langle h,f\rangle(\phi(i)).$$

$\Lambda_K^*$ s'identifie aux fonctions continues de $\Gamma$ dans $\mathcal{O}_K$, puisque $\Lambda_K$ est isomorphe aux mesures de $\Gamma$ dans $\mathcal{O}_K$, comme on le verra dans le chapitre suivant. Fixons $H$ qui annule le module de congruences de $\mathcal{I}$, $\lambda$ la projection sur $\mathcal{I}$ et soit $1_{\mathcal{K}}$ l'idempotent associé à $\mathcal{K}$ dans $\mathfrak{q}(\Gamma_1(N);K)$. Comme corollaire de la proposition précédente on a, pour tout $P$ dans $\mathcal{X}(\mathcal{I};\mathcal{O}_K)$, $k(P)\geq 2$, l'isomorphisme

$$\left(\overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes\widehat{\mathcal{I}}\right)[P]\cong\mathcal{S}^{ord}_{k(P)}(\Phi^1_{r(P)},\varepsilon_P;\mathcal{O}_K),$$

où le membre de gauche est définit comme les éléments qui sont annulés par $P$. La décomposition de $\mathfrak{q}(\Gamma_1(N);K)$ induit une décomposition

$$\mathcal{S}^{ord}_{k(P)}(\Phi^1_{r(P)},\varepsilon_P;K)=K_P(\cong K)\oplus A_P$$

et soit $1_P$ l'idempotent associé à $K_P$. Par définition de module de congruences, on sait que $H\cdot 1_{\mathcal{K}}$ est dans $\mathfrak{h}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes\mathcal{I}$. Il est clair que l'élément qui engendre l'annulateur de $C_k(\mathcal{K})$ correspond au dénominateur de $1_{\mathcal{K}}$. On pose

$$l_\lambda(g)=(H\cdot 1_{\mathcal{K}},g)\text{ pour }g\in\overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\otimes\widehat{\mathcal{I}}.$$

Sa restriction à $\mathcal{S}^{ord}_{k(P)}(\Phi^1_{r(P)},\varepsilon_P;\mathcal{O}_K)$ définit

$$l_P(g)=l_{f_P}(g)=a(1,g|1_P)\text{ pour }g\in\mathcal{S}^{ord}_{k(P)}(\Phi^1_{r(P)},\varepsilon_P;K).$$

On a une formule explicite pour $l_P$ lorsque $g$ est dans $\mathcal{S}_{k(P)}(\Gamma_1(Np^n),\psi\varepsilon_P\omega^{-k(P)};K)$ si $n\geq r(P)$ [Hid85, Proposition 4.5]

$$l_P(g|e)=a(p,f_P)^{r(P)-n}p^{(n-r(P))(k-1)}\frac{\left\langle h_P|[p^{n-r(P)}],g\right\rangle_{Np^n}}{\left\langle h_P,f_P\right\rangle_{Np^{r(P)}}},\tag{1.6.9}$$

où $h_P=f_P^c|_k\begin{pmatrix}0&-1\\Np^{r(P)}&0\end{pmatrix}$, avec $c$ la conjugaison complexe.

# Chapitre 2

# Fonctions $L$ $p$-adiques

Dans ce chapitre, après une brève introduction d'analyse $p$-adique, on donnera des exemples de fonctions $L$ $p$-adiques classiques, les fonctions $L$ de Kubota-Leopold, qui ont trouvé des fonctions $p$-adique qui interpolent les valeurs entières de fonctions $L$ de Dirichlet. L'idée à la base de cette construction est trouver des mesures telles que l'intégrale de $x^m$ soit, plus ou moins, $L(-m, \chi)$ et puis, avec l'isomorphisme entre les mesures et les séries formelles, on associera à eux une série, qui nous donne une fonction $p$-adique analytique. Ensuite, on présentera un'interprétation cohomologique des formes modulaires, qui nous permettra de créer, de la même façon, une fonction $L$ $p$-adique pour la fonction $L$ d'une forme ordinaire.

## 2.1 Mesures et distributions $p$-adiques

Dans cette section, on donne les rudiments d'analyse $p$-adique nécessaires pour définir les fonctions $L$ $p$-adiques qui nous intéressent. Les références sont [Hid93, Chapter 3]. D'abord, on veut étudier les fonctions $f : \mathbb{N} \to A$, pour $A$ sous-anneau de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}_p$. Pour une tel fonction $f$, posons

$$a_n = a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(k)$$

et

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}.$$

Elle est bien défini puisque $\binom{x}{n}$ est null pour $x < n$. En utilisant la définition, on voit que $f^* = f$ et on peut aussi prouver que les $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ sont uniques et on a donc la proposition suivante

**Proposition 2.1.1.** *Pour $f : \mathbb{N} \to A$, il existe une unique suite $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$.*

Pour étudier les mesures $p$-adiques, il faut tout d'abord connaître les fonctions continues. La première considération qu'on fait est qu'une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ vers un sous-anneau $A$ clos de $\mathbb{C}_p$ est déterminée par ses valeurs sur

$\mathbb{N}$, puisque les nombres naturels sont denses dans $\mathbb{Z}_p$ et par la proposition 2.1.1 une telle fonction a une unique série interpolante. Ce qu'on veut prouver est que la série interpolante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ converge uniformément à $f$ et pour faire cela il suffit démontrer que $|a_n|_p$ va vers 0 et ensuite les deux fonctions concident puisqu'elles coïncident sur $\mathbb{N}$. On a donc le théorème de Mahler

**Théorème 2.1.2.** *Soit $A$ un sous-anneau clos de $\mathbb{C}_p$, alors une fonction $f : \mathbb{Z}_p \to A$ est continue si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$.*

On pose $C(\mathbb{Z}_p; A)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $A$. Puisque $\mathbb{Z}_p$ est compact, on peut définir pour une norme, $|f|_p = \max_{x\in\mathbb{Z}_p}|f(x)|_p$, qui coïncide avec $\max_{n\in\mathbb{N}}|a_n(f)|_p$, par l'inégalité triangulaire forte. $C(\mathbb{Z}_p; A)$ est donc un $A$-module de Banach.
On dit qu'une fonction $A$ linéaire $\mu : C(\mathbb{Z}_p; A) \to A$ est une mesure bornée s'il existe $B \geq 0$ tel que $|\mu(f)|_p \leq B|f|_p$ et on appelle $Meas(\mathbb{Z}_p; A)$ l'ensemble des mesures bornées. On notera avec plusieurs symboles la même chose

$$\mu(f) = \int f \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{Z}_p} f \mathrm{d}\mu$$

On définit une norme sur $Meas(\mathbb{Z}_p; A)$, qui en fait un $A$-module de Banach,

$$|\mu|_p = \mathrm{Sup}_{|f|_p=1}(|\mu(f)|_p) = \mathrm{Sup}_f(|\mu(f)|_p/|f|_p).$$

Si $f_n \to f$ uniformément, alors $\mu(f_n) \to \mu(f)$ donc

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i(f)\mu\left(\binom{x}{n}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(f)\mu\left(\binom{x}{n}\right)$$

qui converge puisque

$$|\mu\left(\binom{x}{n}\right)|_p \leq |\mu|_p|\binom{x}{n}|_p \leq |\mu|_p.$$

On a aussi le contraire, grâce à Katz

**Théorème 2.1.3.** *Soit $\{b_n\}_{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A$ bornée, alors on peut définir une unique mesure $\mu$ bornée telle que*

$$\int \binom{x}{n} \mathrm{d}\mu = b_n \quad \int f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n(f).$$

*Toutes les mesures bornées peuvent être obtenues de cette façon et $|\mu|_p = max_{\mathbb{N}}|b_n|_p$.*

Il est clair que $\mu$ est donc déterminé par $\mu(x^i)$, mais il faut faire attention parce que, même si $\{\mu(x^i)\}$ sont bornés, peut être que $\{\binom{x}{n}\}$ ne sera pas bornée. Considérons maintenant $Meas(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ ; il est clair que pour tout $\Phi(T) = \sum_n a_n T^n$ dans $\mathbb{Z}_p[[T]]$ on peut définir une mesure $\mu_\Phi$ en posant $\int \binom{x}{n} \mathrm{d}\mu_\Phi = a_n$. Il y a aussi une flèche inverse qui, à une mesure $\mu$ de $\mathbb{Z}_p$ sur $\mathbb{Z}_p$, associe

$$\Phi_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \binom{x}{n} \mathrm{d}\mu\right) T^n.$$

On a donc un isomorphisme $Meas(\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[[T]]$. Pour une extension finie $K$ de $\mathbb{Q}_p$, on a $Meas(\mathbb{Z}_p;\mathcal{O}_K) \cong \mathcal{O}_K[[T]]$ par extension des scalaires. On peut définir un produit de convolution $*$

$$\int f(x)\mathrm{d}\mu * \mu' = \int\int f(x+y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\mu',$$

il respecte l'isomorphisme avec $\mathcal{O}_K[[T]]$ et il fait de $Meas(\mathbb{Z}_p;\mathcal{O}_K)$ une $\mathcal{O}_K$-algèbre de Banach.
Pour une utilisation future, posons

$$R = \{P(t)/Q(t) : P(t), Q(t) \in \mathbb{Z}_p[t] \text{ et } |Q(1)|_p = 1\}$$

Il n'est pas difficile de voir que $R$ est clos par $\partial_n = \frac{t^n \mathrm{d}^n}{n! \mathrm{d}t^n}$ et on peut donc définir, pour $F$ dans $R$, la mesure $\mu_F$ telle que

$$\int \binom{x}{n} \mathrm{d}\mu_F = \partial_n(F)|_{t=1}$$

et, en développant $F(t)$ en série de Taylor en $t = 1$, on a

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int \binom{x}{n} \mathrm{d}\mu_F \right) T^n \text{ pour } T = t - 1$$

et cela nous donne un plongement de $R$ dans $\mathbb{Z}_p[[T]]$.
On a que $Meas(\mathbb{Z}_p;\mathcal{O}_K)$ est un module sur $C(\mathbb{Z}_p;\mathcal{O}_K)$ en posant

$$\int g \mathrm{d} f\mu = \int f(x)g(x)\mathrm{d}\mu.$$

Quelle relation existe-t-il entre $\Phi_\mu$ et $\Phi_{f\mu}$ ? On commence par le cas $f(x) = z^x$, pour $z$ dans $\mathcal{O}_K$, $|z-1|_p < 1$. On a

$$z^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} (z-1)^n$$

et aussi $\int z^x \mathrm{d}\mu = \Phi_\mu(z)$ et on obtient donc

$$\Phi_{z^x\mu}(t) = \Phi_\mu(zt) \text{ dans } \mathcal{O}_K[[t-1]].$$

Soit $LC(\mathbb{Z}_p; A)$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{Z}_p$ continues et localement constantes, i.e. qui se factorisent par $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$. Fixons dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ le sous-groupe de racines $p^n$-ièmes de l'unité $\mu_{p^n}$ et soit $K' = K(\mu_{p^n})$ ; elles sont congrues à 1 modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K'}$. Pour $\phi$ localement constante modulo $p^n$, on a

$$\phi(x) = p^{-n} \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} \zeta^x \sum_{b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \phi(b)\zeta^{-b}.$$

Pour $\mu$ dans $Meas(\mathbb{Z}_p;\mathcal{O}_K)$ on a donc dans $\mathcal{O}_K[[t-1]]$

$$\Phi_{\phi\mu} = [\phi]\Phi_\mu = p^{-n} \sum_{b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \phi(b) \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} \zeta^{-b} \Phi_\mu(\zeta t).$$

On introduit maintenant le concept de distribution. Soit $G = C \times \mathbb{Z}_p^r$ un groupe topologique, où $C$ est un groupe fini. Posons $LC(G;X)$ l'ensemble de fonction localement constantes de $G$ vers un espace topologique $X$. Si $\phi$ est dans $LC(G;X)$, il est facile de voir que $\phi$ se factorise par un certain $G_i$, donc il est dans $C(G/G_i;X)$. Une telle fonction $\phi$ correspond à une somme formelle $\sum_{g\in G/G_i} \phi(g)g$ dans $X[G/G_i]$. On a donc

$$LC(G;X) = \varinjlim_i C(G/G_i;X) = \varinjlim_i X[G/G_i].$$

Pour tout anneau topologique, on définit $Dist(G;R)$ par

$$Dist(G;R) = \mathrm{Hom}_R(LC(G;R),R) = \varprojlim_i \mathrm{Hom}_R(R[G/G_i],R).$$

Par exemple, les distributions de $\mathbb{Z}_p$ vers $\mathcal{O}_K$ s'identifient à l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_K$, qu'on sait être isomorphe à $\mathcal{O}_K[[T]]$ et donc à $Meas(\mathbb{Z}_p;\mathcal{O}_K)$. Cela est vrai dans un cas plus général, comme on verra ensuite.
Pour tout $S$ ouvert dans $G$, posons $\chi_S$ la fonction caractéristique de $S$. Il est clair qu'une distribution $\mu$ doit satisfaire

$$\mu(\chi_{h+G_i}) = \sum_{g\in G_i/G_j} \mu(\chi_{h+g+G_j})$$

pour tout $j > i$ et $h$ dans $G$. La réciproque est aussi vrai ; si on donne une fonction $\mu$ définie sur l'ensemble $\{g + G_j : g \in G,\ j > i\}$ qui satisfait cette relation, alors $\mu$ peut être prolonger uniquement à une distribution. Soit $R$ un anneau avec une norme $p$-adique. On dit qu'une distribution $\mu$ est bornée si $\mathrm{Sup}_{\{\phi\neq 0,\phi\in LC(G;R)\}}|\mu(\phi)|_p/|\phi|_p$ est borné. Il est équivalent à demander que $|\phi(g+G_i)|_p$, pour $i$ assez grand et pour tout $g$ dans $G$, soit borné. Si on suppose de plus que $R$ soit fermé, alors $LC(G;R)$ est dense dans $C(G;R)$ et on peut associer à toute distribution bornée $\mu$ une mesure bornée

$$\mu(f) = \lim_i \mu(f_i)$$

pour des fonctions $f_i$ localement constantes qui tendent à $f$. Il est claire qu'on peut associer à chaque mesure bornée une distribution bornée par restriction. On a donc

**Théorème 2.1.4.** *Pour tout sous-anneau $R$ de $K$, on a que chaque distribution bornée peut être prolonger uniquement à une measure bornée et que*

$$Dist(G;\mathcal{O}_K) \cong Meas(G;\mathcal{O}_K).$$

On a donc, par exemple, comme $\mathcal{O}_K$-module,

$$Dist((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p^r;\mathcal{O}_K) \cong \prod_{\chi\in((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)^*} \mathcal{O}_K[[X_1,\dots,X_r]].$$

On termine avec deux rappelle : si on choisit un générateur de $\Gamma$ $u$ (on a toujours pris $1+p$, mais on peut choisir tout les éléments dans $\Gamma\setminus\Gamma_2$), l'exponentiel définit un homéomorphisme $\mathbb{Z}_p \cong \Gamma$ qui envoie $s$ dans $u^s$.

On peut définir une série formelle $\log(X) = \sum_n (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}$ tel que elle soit l'inverse de $\exp(X) = \sum_{n=0} \frac{X^n}{n!}$. Comme série formelle, on a $\log(X^s) = s\log(X)$. Le logarithme induit une homéomorphisme entre $\Gamma$ et $p\mathbb{Z}_p$. Pour $d$ dans $\Gamma$, on pose $s(d) = \log(d)/\log(u)$, on a $u^{s(d)} = d$. Si $d$ est un'unité dans $\mathbb{Z}_p^\times$, on pose $\langle d\rangle = \omega(d)^{-1}d$ la projection de $d$ sur $\Gamma$, on a dans la même façon $u^{s(\langle d\rangle)} = \omega(d)^{-1}d$. Cela nous sera très utile ensuite.
Finalement, le théorème de préparation de Weierstrass [Hid93, Lemma 7.3.1].

**Théorème 2.1.5.** *Soit $F(T)$ une série formelle dans $\mathcal{O}_K[[T]]$, alors $F$ peut être écrit comme $\omega_K^a U(T)P(T)$, avec $\omega_K$ uniformisante de $\mathcal{O}_K$, $a \geq 0$, $U(T)$ série formelle inversibles et $P(T)$ polynôme distingué (i.e. monique et congruent à $T^n$ modulo $\omega$).*

Avec cela on voit que un idéal premier de $\Lambda_K$ qui définit on $\mathcal{O}_K$-point s'identifie avec un polynôme $X - x$, avec $|x|_p < 1$. Si on cherche points dans extensions de $K$, ils est claire que le polynôme distingué peut avoir degré plus haut.

## 2.2 La mesure $\zeta$ $p$-adiques

On introduit une mesure qui donne sur $x^m$, à de coefficients près, le valeur $\zeta(-m)$, qui sont dans $\mathbb{Q}$. On fixe d'abord un entier $a \geq 2$, premier avec $p$ et on définit $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tel que

$$\xi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \not\equiv 0 \bmod a \\ \text{1-a} & \text{sinon} \end{cases}.$$

On définit ensuite

$$\Psi(t) = \frac{-\sum_{b=1}^a \xi(b)(1 + t + \cdots + t^{b-1})}{1 + t + \cdots + t^a} = \frac{\sum_{b=1}^a \xi(b)t^b}{1 - t^a}$$

on a que [Hid93, Theorem 2.1.1]

$$(1 - a^{m+1})\zeta(-m) = \left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m \Psi(t)|_{t=1}$$

En observant que

$$\partial_n = \sum_{m=0}^n C_{n,m}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m$$

pour $C_{n,m}$ les coefficients de $\binom{x}{n}$ dans la base $1, x, \ldots, x^n$. Par la première définition de $\Psi(t)$, il est claire que la valuation $p$-adiques de l'évaluation du dénominateur en 1 de $\Psi$ est 1 puisque $a$ est premier à $p$. Donc $\Psi(t)$ est dans l'ensemble $R$ définit dans le paragraphe précédent et il définit une mesure bornée. On a donc

**Théorème 2.2.1.** *Soit $a \geq 2$, $a$ premier à $p$. Alors il existe un'unique mesure bornée on $\mathbb{Z}_p$ $\zeta_a$, à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$, tel que*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^m \mathrm{d}\zeta_a = (1 - a^{m+1})\zeta(-m)$$

## 2.3 La fonction $L$ $p$-adiques de Kubota-Leopold

On suppose $p \geq 3$ de ici à la fin du chapitre. Le cas $p = 2$ n'est pas trop différent des autres $p$, mais il y a des petites modifications à faire puisque $Z_2^{\times} = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\times} \times 1 + 4Z_2$ et en raison du fait que dans le dernier chapitre on supposera toujours $p \geq 5$, on préfère ne faire pas ce cas-là. Avec la notation des paragraphes précédents, on a

$$\Psi(t) = \Phi_{\zeta_a}(t)$$

Pour $\phi$ dans $C(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}; \mathcal{O}_K)$, on veut étudier $\phi\zeta_a$ ; on sait que $\Phi_{\phi\zeta_a}$ est

$$[\phi]\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \phi(m)t^m - a \sum_{m=1}^{\infty} \phi(am)t^{am}.$$

Comme avant pour la fonction $\zeta$ de Riemann, on a [Hid93, Corollary 2.3.2]

$$L(-m, \phi - a^{m+1}\phi(ax)) = (t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^m [\phi]\Psi(t)|_{t=1}.$$

Si $\chi$ est un caractère modulo $p^n$ alors on le peut étendre sur $\mathbb{Z}_p$ dans la façon evident et on a

$$L(-m, \chi - a^{m+1}\chi) = (1 - a^{m+1}\chi(a))(1 - \chi_0(p)p^m)L(-m, \chi_0)$$

où $\chi_0$ coïncide avec $\chi$ si $\chi$ est non-trivial, ou $\chi_0 \equiv 1$ si $\chi$ est trivial. On a donc démontré la première partie de

**Théorème 2.3.1.** *Soit $\chi$ un caractère modulo $p^n$ primitif (pour $\chi$ trivial soit $n = 1$), alors*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x)x^m \mathrm{d}\zeta_a = (1 - a^{m+1}\chi(a))(1 - \chi_0(p)p^m)L(-m, \chi_0)$$

*Si $\chi$ est un caractère pair, alors*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x)x^{-1} \mathrm{d}\zeta_a = \left\{ \begin{array}{c} (1-p)\log(a) \ \textit{si } \chi = Id \\ -(1 - \chi(a))p^{-n}G(\chi)\sum_{(b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\times}} \chi^{-1}(b)\log(1 - \zeta^b) \end{array} \right. .$$

*Démonstration.* La première partie, comme on a vu, est vrai sans l'hypothèse que $\chi$ soit primitif et si $\chi(-1) = -1$, cette intégrale est 0 (on envoie $x$ dans $-x$). En général l'intégrale de $x^m$ est nul si $\chi(-1) = (-1)^m$.
On suppose $a \equiv 1 \bmod p$. Soit $\Phi(t) = \log(\frac{1-t^a}{1-t})$, qu'on peut écrire comme une série formelle $\Phi$ dans $\mathbb{Q}_p[[T]]$ ($T = t - 1$). Puisque $\frac{1-t^a}{1-t}|_{t=1} = a$ est dans l'ensemble de convergence du logarithme, $\Phi(1)$ est bien défini. Puisque $x^{-1}\chi(x)$ est continue sur $\mathbb{Z}_p$, on peut définir la mesure $\mu = x^{-1}\chi(x)\zeta_a$. Par définition, $\Phi_{x\mu} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\mu$ et donc $(1 + T)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\Phi_\mu = [\chi]\Psi$, mais $[\chi]\Psi = (1 + T)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\mu$. Donc $\Phi - \Phi_\mu$ est constante et puisque $[\chi]$ annulle les costantes, alors $\Phi = \Phi_\mu$. Donc

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x)x^{-1} \mathrm{d}\zeta_a = [\chi]\Phi(1) = p^{-n} \sum_{b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \chi(b) \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} \zeta^{-b}\Phi(\zeta)$$

Si $\chi$ est primitif et $\zeta = e^{2\pi i \frac{-c}{p^n}}$, alors

$$\sum_{b=1}^{p^n} \chi(b)\zeta^{-b} = \chi^{-1}(b)G(\chi)$$

et on obtient

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(x)x^{-1}\mathrm{d}\zeta_a = p^{-n}G(\chi) \sum_{(b\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \chi^{-1}(b)\Phi(\zeta^{-b}).$$

Si $\chi$ est trivial, on a

$$\sum_{b=1}^{p} \chi(b)\zeta^{-b} = \left\{ \begin{array}{cc} p-1 & \text{si } \zeta = 1 \\ -1 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Puisque $\Phi(\zeta^b) = \log(1-\zeta^{ab}) - \log(1-\zeta^b)$, on voit que $\log(1-\zeta^{-b})$ apparaît deux fois dans la somme, avec coefficients $-\chi(-b)^{-1}$ et $\chi(-b/a)^{-1}$. Puisque $\chi(-1) = 1$, on peut conclure si $|a-1|_p < 1$.
Pour $a$ quelconque il faut d'abord introduire la fonction $L$ $p$-adique, qui est indépendant du $a$ et donc le théorème sera prouvé. $\square$

Puisque le support de $\chi$ est dans $\mathbb{Z}_p^\times$, on peut restreindre les intégrales à $\mathbb{Z}_p^\times$. On définit la fonction $L$ $p$-adiques

$$L_p(s,\chi) = (1-\chi(a)\langle a\rangle^{1-s})^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi\omega^{-1}(x)\langle x\rangle^{-s}\mathrm{d}\zeta_a(x).$$

Si $\chi$ est non trivial, alors $L_p(s,\chi)$ est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$, mais si $\chi = Id$, alors $L_p(s,Id) = \zeta_p(s)$ est défini et continue sur $\mathbb{Z}_p \setminus \{-1\}$. Par la formule suivante

$$L_p(-m,\chi) = (1-(\chi\omega^{-m-1})_0(p)p^m)L(-m,(\chi\omega^{-m-1})_0)$$

on a que la fonction $L_p$ est indépendant de $a$.
On démontrera que $L_p$ est une fonction $p$-adique analytique (i.e. qu'on peut écrire comme série de puissance) sur $\mathbb{Z}_p$ si $\chi$ est non trivial ou méromorphe si $\chi = Id$. On définit la mesure $\zeta_{a,\chi}$ sur $\Gamma$ en posant pour $\phi : \Gamma \to \mathcal{O}_K$

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)\mathrm{d}\zeta_{a,\chi}(\gamma) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi\omega^{-1}(x)\phi(\langle x\rangle)\mathrm{d}\zeta_a(x).$$

Avec l'isomorphisme entre $\mathbb{Z}_p$ et $\Gamma$ donné par $\iota : s \mapsto u^s$, on peut associer une série formelle à la mesure $\zeta_{a,\chi}$ puisque

$$\int_\Gamma \gamma^{-s}\mathrm{d}\zeta_{a,\chi}(\gamma) = \int_{\mathbb{Z}_p} u^{-sx}\mathrm{d}\iota^*(\zeta_{a,\chi})(x) = \Phi_{\iota^*(\zeta_{a,\chi})}(u^{-s}),$$

et on pose $\Phi_{a,\chi}(t) = \Phi_{\iota^*(\zeta_{a,\chi})}(u^{-1}t)$. On a donc

$$L_p(1-s,\chi) = (1-\chi(a)\langle a\rangle^s)^{-1}\Phi_{a,\chi}(u^s).$$

Puisque $u^s = \exp(s\log(u))$, $\Phi_{a,\chi}(u^s)$ est une fonction analytique et les seuls pôles de $L_p(s,\chi)$ viennent de $(1-\chi(a)\langle a\rangle^{1-s})^{-1}$, donc il suffit étudier cette fonction pour $s = 1$. Si $\chi$ est non trivial, on peut choisir $a$ ($L_p$ est indépendant de $a$) tel que $\chi(a) \neq 1$ et $(1-\chi(a)\langle a\rangle^{1-s})$ n'a pas des zéros. Si $\chi$ est triviale, alors $\zeta_p(s)$ a un pôle simple, puisque

$$\langle a\rangle^s = 1 + s\log(\langle a\rangle) + O(s)$$

avec résidu $1-p^{-1}$. Donc

**Théorème 2.3.2.** *Pour tout caractère $\chi$ pair, il existe une fonction p-adique analytique $L_p(s,\chi)$ sur $\mathbb{Z}_p \setminus \{-1\}$ tel que*

$$L_p(-m,\chi) = (1-(\chi\omega^{-m-1})_0(p)p^m)L(-m,(\chi\omega^{-m-1})_0)$$

*pour tout $m$ dans $\mathbb{N}$. Si $\chi$ est non-trivial, $L_p(s,\chi)$ est analytique à $s=1$. Si $\chi$ est triviale, alors $\zeta_p(s)$ a un pôle simple avec résidu $1-p^{-1}$.*

Si $\chi(-1) = -1$, alors $\chi\omega^{-m-1}(-1) = (-1)^m$ et $L(-m,\chi\omega^{-m-1}) = 0$ et donc $L_p(s,\chi) = 0$ puisque il est nul sur $\mathbb{N}$. On a, dans tout cas, interpolation $p$-adique aussi pour les caractères impairs, puisque si $\chi$ et $m$ sont pairs, alors $\chi\omega^{-m-1}$ est impair. On termine avec le suivant [Hid90, Lemma 3.1], qui étend ce théorème

**Proposition 2.3.3.** *Soit $\alpha$ un caractère primitif modulo $Cp^r$, $C$ et $p$ premier. Alors pour tout $a \geq 2$, il existe une mesure $\zeta_\alpha^a$ tel que pour tout caractère $\xi$ de $Z_L = (\mathbb{Z}/LpZ)^\times \times \Gamma$ on a*

$$\int_{Z_L} \xi(z) z_p^{m-1} \mathrm{d}\zeta_\alpha^a = (1-\xi_1\alpha_1(a)a^m)L(1-m,\alpha\xi),$$

*pour $\xi_1\alpha_1$ la restriction de caractères à leur p-partie.*

## 2.4 Interprétation cohomologique des formes modulaires

On rappelle que pour tout $\Gamma$ sous-groupe de congruence, on avait défini une surface de Riemann (resp. compacte) $Y = Y(\Gamma)$ (resp. $X = X(\Gamma)$). Avec la notation de l'annexe, $S$ coïncide avec les cusp, la compactification $Y^S$ est la compactification de Borel-Serre et $\Gamma_s$ coïncide avec le stabilisateur de la cusp $s$. Posons, pour un anneau commutatif $R$, $L(n,R)$ comme l'espace des polynômes homogènes de dégrée $n$ en $X$ et $Y$. Par définition, $L(n,R) = L(n,\mathbb{Z}) \otimes R$. On définit l'action du $M(2,R)$ sur $L(n,R)$ par

$$\gamma P(X,Y) = P((\gamma^\iota \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix})^t)$$

pour $\gamma^\iota = \mathrm{Tr}(\gamma)I - \gamma$. Explicitement, si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\gamma^\iota = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\gamma P(X,Y) = P(dX-bY,-cX+aY)$. Nous sommes intéressés à la cohomologie parabolique de $Y(\Gamma)$ à coefficients dans $L(n,R)$. Soit $R = K$ pour $K$ corps, on peut calculer la dimension de $H_P^1(\Gamma, L(n,K))$ sur $K$ et on note que, si $\Gamma$ est sans torsion, alors

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}_{n+2}(\Gamma)) = \dim_K(H_P^1(\Gamma, L(n,K))).$$

En fait, il existe un isomorphisme entre $\mathcal{S}_{n+2}(\Gamma)$ et $H_P^1(\Gamma, L(n,\mathbb{R}))$. Pour $z$ dans $\mathfrak{H}$, on considère la $L(n,\mathbb{C})$-forme différentielle $\delta_n(z) = (X-zY)^n \mathrm{d}z$. On a pour

$\gamma$ dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\gamma^*\delta_n(z) &= \left((XY)\begin{pmatrix}1\\-\gamma(z)\end{pmatrix}\right)^n (cz+d)^{-2}\mathrm{d}z\\ &= \left((XY)^t\gamma^\iota\begin{pmatrix}1\\-z\end{pmatrix}\right)^n (cz+d)^{-n}(cz+d)^{-2}\mathrm{d}z\\ &= (cz+d)^{-n-2}\gamma\delta_n(z)\end{aligned}$$

On pose donc pour $f$ dans $\mathcal{S}_{n+2}(\Gamma)$

$$\omega(f) = 2\pi i f(z)\delta_n(z).$$

Il est claire que $\gamma^*\omega(f) = \gamma\omega(f)$, donc $\omega(f)$ est une forme différentielle dans le faisceau de $L(n,\mathbb{C})$-forme différentielle sur $\Gamma$. On fixe $z$ dans $\overline{\mathfrak{H}}$ et on considére $\phi_z$

$$\phi_z(f)(\gamma) = \int_z^{\gamma(z)} \mathrm{Re}(\omega(f)) \in L(n,\mathbb{R}).$$

Il est facile a voir que pour $z$, $z'$ dans $\overline{\mathfrak{H}}$ et $\gamma$, $\gamma'$ dans $\Gamma$ et $\pi$ dans le stabilisateur d'une cusp $s$ de $\Gamma$ on a

$$\begin{aligned}\phi_z(f)(\gamma) - \phi_{z'}(f)(\gamma) &= (1-\gamma)\int_z^{z'} \mathrm{Re}(\omega(f)),\\ \phi_z(f)(\gamma\delta) &= \gamma\phi_z(f) + \phi_z(f)(\gamma),\\ \phi_z(f)(\pi) &= (1-\pi)\int_z^{s} \mathrm{Re}(\omega(f)).\end{aligned}$$

Donc $\phi_z(f)$ est un 1-cocycle parabolique dans $H^1_P(\Gamma, L(n,\mathbb{R}))$ et sa classe ne dépende pas de $z$. On peut donc définir $\phi : \mathcal{S}_{n+2}(\Gamma) \to H^1_P(\Gamma, L(n,\mathbb{R}))$. On a donc l'isomorphisme de Eichler-Shimura [Hid93, Theorem 6.2.1].

**Théorème 2.4.1.** *Soit $\Gamma$ sans torsion, alors $\phi$ est un isomorphisme.*

Pour prouver l'injectivité on introduit une accouplement $A$ sur $L(n,\mathbb{R})$ tel que il soit non-dégénéré sur l'image de $\mathcal{S}_{n+2}(\Gamma)$ (puisque il coïncide, à transformations linéaires près, au produit de Petersson) et tel que si $\phi(f)$ soit nulle, alors $A(f,g) = 0$ pour tout $g$ et donc $f = 0$. On conclue avec la formule sur la dimension de deux espace.
Maintenant, on veut définir les opérateurs de Hecke $[\Gamma\alpha\Gamma']$ pour les groupes de cohomologie de $Y(\Gamma)$ et $Y(\Gamma')$. Soit comme dans 1.2 $[\Gamma\alpha\Gamma'] = \amalg\Gamma\alpha_j$ et pour $\gamma$ dans $\Gamma'$, soit $\gamma_i$ dans $\Gamma$ tel que $\alpha_i\gamma = \gamma_j\alpha_j$. Pour un cocyle $u$ de $\Gamma$ dans $L(n,A)$ on pose

$$u|[\Gamma\alpha\Gamma'](\gamma) = \sum \alpha_i^\iota u(\gamma_i).$$

Si $u$ est un cocycle (resp. cobord) alors $u|[\Gamma\alpha\Gamma']$ est un cocyle (resp. un cobord). On définit les opérateurs $T_n$ comme dans 1.2. Soit $u = \phi(f)$ et $g = f|[\Gamma\alpha\Gamma']$, on a

$$\phi(g) = u|[\Gamma\alpha\Gamma'](\gamma) + (\gamma-1)x$$

et donc $\phi$ respecte l'action de $\hbar_{n+2}(\Gamma)$. Si on pose $\mathcal{S}(\Gamma)^c$ l'ensemble de formes modulaires anti-holomorphes, on a l'isomorphisme de Hecke-modules suivant

$$\mathcal{S}(\Gamma) \oplus \mathcal{S}(\Gamma)^c \cong H^1_P(\Gamma, L(n,\mathbb{C})).$$

On fixe $N$ et un caractère de Dirichlet $\chi$ modulo $N$ ; nous définissons un $\Gamma_0(N)$-module $L(n,\chi,A)$ comme l'espace des polynômes homogènes de dégrée $n$ en $X$ et $Y$ avec l'action de $\Gamma_0(N)$ suivante

$$\gamma P(X,Y) = \chi(d)P(dX - bY, -cX + aY).$$

Il est le tordu par $\chi$ de l'action définit avant. Pour $k = n+2$, soit $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \overline{\chi})^c = \left\{\overline{f(z)} : f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \overline{\chi})\right\}$. On a les théorèmes suivants [Hid93, §6.3].

**Théorème 2.4.2.** *Pour tout $N$ et tout $\chi$ caractère modulo $N$ on a*

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \chi) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \overline{\chi})^c \cong H^1_P(\Gamma_0(N), L(n, \chi, \mathbb{C})).$$

*Si $N = p^\alpha$ et $\chi$ primitif ou $N = 1$ et $n > 0$ on a*

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \overline{\chi})^c \cong H^1(\Gamma_0(N), L(n, \chi, \mathbb{C})),$$

$$H^1(\Gamma_0(N), L(n, \chi, \mathbb{C}))/H^1_P(\Gamma_0(N), L(n, \chi, \mathbb{C})) \cong \bigoplus_{s \in S} H^1(\Gamma_0(N)_s, L(n, \chi, \mathbb{C})).$$

*Si $N = 0$ et $n = 0$ alors*

$$\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \cong \mathcal{S}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \cong 0,$$

$$H^1_P(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \mathbb{C}) \cong H^1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \mathbb{C}) \cong 0.$$

*Touts les isomorphismes sont isomorphismes de modules de Hecke.*

Le théorème précédent peut être complété par le suivant

**Théorème 2.4.3.** *Soit $\chi$ primitif modulo $p^\alpha$ ou $\alpha = 0$ et $K$ un corps de caractéristique 0, alors $H^1(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K))$, $H^1_P(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K))$ et aussi $H^1_c(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K))$ sont modules semi-simples sur l'algèbre de Hecke sur $K$. En particulier, si $\chi$ est non-trivial ou $k \neq 2$, alors*

$$H^1_P(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K)) \cong \hbar_k(\Gamma_0(N), \chi; K)^2,$$

$$H^1_c(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K)) \cong H^1(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K)) \cong$$
$$\cong \hbar_k(\Gamma_0(N), \chi; K) \oplus \mathcal{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; K).$$

Par semi-simplicité, on la décomposition

$$\mathcal{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; K) \cong \hbar_k(\Gamma_0(N), \chi; K) \oplus E(\Gamma_0(N), \chi; K),$$

pour la partie d'Eisenstein de l'algèbre de Hecke et il existe donc une section (correspondante à un idempotent $E$) pour la projection sur $E(\Gamma_0(N), \chi; K)$. Si $K$ est le corps de fractions d'un anneau $A$, par exemple un anneau d'entiers d'un corps de nombre ou $p$-adique, on voudrais que cette section soit défini sur $A$, mais cela n'est pas vrai en général, dû aux dénominateurs de la partie d'Eisenstein. Il existe également un nombre $\eta$ tel que $\eta E$ soit dans $\mathcal{H}_k(\Gamma_0(N), \chi; A)$. On termine avec une définition ; soit $j = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui agit sur $H^1_P(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K))$. On pose

$$H^1_P(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K))^{\pm} = \left\{x \in H^1_P(\Gamma_0(N), L(n,\chi,K)) : x|j = \pm(-1)^{n+1}x\right\}.$$

Si $K = \mathbb{C}$, alors $H^1_P(\Gamma_0(N), L(n,\chi,\mathbb{C}))^{\pm}$ est libre de rang 1 sur $\hbar_k(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{C})$ et donc il est vrai pour tout corps de caractéristique 0. Explicitement, dans le cas $K = \mathbb{C}$, l'action est donné par $\omega \mapsto j^\iota(j^*)\omega$ et $f(z) \mapsto f(-\overline{z})$.

## 2.5 Le symbole modulaire de Manin

Soit $f$ une forme propre de poids $k = n+2$ pour les opérateurs de Hecke et $\lambda$ le morphisme associé. On a introduit dans 1.3 sa fonction $L$. On définit les périodes $r_m(f) = \int_0^{i\infty} f(z) z^m \mathrm{d}z$, il est facile à voir que

$$r_m(f) = \frac{m!}{(-i2\pi)^{m+1}} L(f, m+1)$$

pour $1 \leq m+1 \leq k-1$. Si $f$ est une forme modulaire pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, alors Manin [Man73, 1.2] a prouvé que les nombre $r_m(f)$ sont essetiellement rationnels, au sense que les rapports

$$(r_0(f) : \cdots : r_k(f)) \text{ et } (r_1(f) : \cdots : r_{k-1}(f))$$

sont rationnels dans $\mathbb{Q}(\lambda)$. Il est donc naturel essayer de chercher une fonction $L$ $p$-adique qui interpole la partie rationnelle de $L(f,s)$ aux entiers entre 1 et $k-1$. Pour faire cela, on note que dans la formulation intégrale de $L(f,s)$ on fait l'intégration sur $\mathbb{R}_+^*$ du caractère $\chi(y) = y^s$ par la mesure $f(z)y^{-1}\mathrm{d}z$. Avec l'interprétation cohomologique qu'on a donné, on peut définir une distribution $p$-adique associé a $f$ qui, intégrée sur $x^m$ nous donnera les valeurs qu'on cherche et puis comme pour les fonctions $L$ de Dirichlet, on construit la correspondante fonction $L$ $p$-adique. L'idée de ce construction est due à Mazur pour le cas $k=2$, le cas d'une courbe elliptique, et puis pour tout $k$ à Manin, dans [Man73], [Man74]. On considère la compactification $Y^S$ de $Y(\Gamma)$ comme dans l'annexe et soit $K = \mathbb{Q}(\lambda)$ et $A$ son anneau d'entiers. Pour tout $r$ dans $\mathbb{Q}$, la ligne $c^r$ qui connecte $r$ et $\infty$ est un cycle dans $H^1(Y^S, \cup_S \partial Y_s, \mathbb{Z})$. Puisque $c^r$ est homéomorphe à $\mathbb{R}_+$, on a un morphisme

$$\mathrm{Int}_r : H^1(Y(\Gamma), L(n,\chi,A)) \longrightarrow L(n,A)$$

qui est l'intégration d'une forme différentielle $\omega$ sur $c^r$.
Soit $\pi$ de $H^1_c(Y(\Gamma), L(n,\chi,A))$ vers $H^1_P(Y(\Gamma), L(n,\chi,A))$ la surjection naturelle, on voudrais trouver une section pour $\pi$, pour intégrer. Puisque pour $K$ cette section $\nu$ est donnée par la partie d'Eisenstein, on choisit cela et on sait que $\eta\nu$ a valeurs dans $L(n,A)$.
Fixons $f$ forme propre normalisée dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(p^a),\chi)$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(T_n) q^n$ et $Y = Y(\Gamma_0(p^a))$. Supposons que $A$ soit un anneau principal ; on pose

$$H^1_P(Y, L(n,\chi,A))^{\pm}[\lambda] = \left\{ x \in H^1_P(Y, L(n,\chi,A))^{\pm} : x|T_n = \lambda(T_n)x \right\}.$$

Puisque il est sans-torsion, il est libre et de rang 1 puisque sa extension à $K$ a rang 1. Soit donc $\delta_{\pm}(f)$ un générateur comme $A$-module. Posons

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}(f) &= \frac{\omega(f) \pm (-1)^{n+1}\omega(f)|j}{2} \\ &= \pi i (f(z)(X - zY)^n \mathrm{d}z \pm f(-\overline{z})(X - \overline{z}Y)^n \mathrm{d}\overline{z}), \end{aligned}$$

qui est dans $H^1_P(Y, L(n,\chi,\mathbb{C}))^{\pm}[\lambda]$. On choisit $\Omega_{\pm}(f)$ (appelée la période canonique) tel que

$$\omega_{\pm}(f) = \Omega_{\pm}(f)\delta_{\pm}(f).$$

On a donc

$$\mathrm{Int}_r(\nu(\omega_\pm(f))) = \Omega_\pm(f)\mathrm{Int}_r(\delta_\pm(f)) \in \Omega_\pm(f)L(n,K).$$

On peut calculer

$$\mathrm{Int}_r(\nu(\omega_\pm(f))) = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(1 \pm (-1)^j\right) j!(-2\pi i)^{-j}L(f,j+1)X^{n-j}Y^j.$$

Si $f$ est une forme modulaire sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, alors $\Omega^+(f)$ est le facteur transcendant de $r_{2j}$ (puisque dans la formule ci-dessus on voit que l'intégral contient seulement $L(f,2j+1)$) et $\Omega^-(f)$ est le facteur transcendant pour les périodes impaires.
Si on prend un caractère $\psi$ modulo $N$ primitif, alors on pose

$$L(f\otimes\psi,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(T_n)\psi(n)}{n^s}.$$

Il exist un prolongement et un'équation fonctionnelle aussi pour cette fonction. On a

$$\sum_{j=1}^{N}\psi^{-1}(j)\begin{pmatrix} 1 & -j/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{Int}_{j/N}(\omega_\pm(f)) =$$

$$= \frac{1}{2}G(\psi^{-1})\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(1 \pm \psi(-1)(-1)^j\right) j!(-2\pi i)^{-j}L(f\otimes\psi,j+1)X^{n-j}Y^j.$$

Posons

$$S(j,f\otimes\psi) = \frac{G(\psi^{-1})j!L(f\otimes\psi,j+1)}{(2\pi i)^j\Omega_\pm(f)},$$

où le signe de $\Omega_\pm$ est le signe de $\psi(-1)(-1)^j$. On a donc que $S(j,f\otimes\psi)$ est algébrique et de plus, si on choisit $\delta_\pm(f^\sigma) = \delta_\pm(f)^\sigma$ pour tout $\sigma$ dans le groupe de Galois de $\mathbb{Q}$, on a $S(j,f\otimes\psi)^\sigma = S(j,f^\sigma\otimes\psi^\sigma)$. On veut donc trouver des mesures $p$-adiques pour interpoler ces valeurs.
Soit $N = p^a$ et supposons que $f$ soit ordinaire. Si $N = 1$, alors on change $f$, en augmentant son niveau comme on a fait après la définition 1.4.3. Posons $K' = \mathbb{Q}_p(\lambda)$ et $A = K \cup \mathcal{O}_{K'}$ . Il n'est pas nécessaire demander que $f$ soit ordinaire si on veut seulement une mesure qui soit interpolante (Manin dans [Man73] pose seulement des hypothèses de lipschitziennité sur les fonctions pour lesquelles l'intégrale existe), mais si on veut que elle soit une fonction d'Iwasawa (i.e. de la forme $\Phi(u^s-1)$ pour $\Phi$ dans $\mathcal{O}_{K'}[[T]]$ comme pour les fonctions $L$ de Dirichlet), cette hypothèse devient nécessaire. Posons

$$c : p^{-\infty}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(H^1_c(Y,L(n,\chi,K)),L(n,K))$$

qui envoie $s$ dans $c(s) : \omega \mapsto \mathrm{Int}_s(\omega)$. Pour $\omega$ dans $H^1_c(Y,L(n,\chi,K))$, on définit $c_\omega : p^{-\infty}\mathbb{Z} \to L(n,K)$ par

$$c_\omega(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c_s(\omega).$$

Par définition, $c_\omega(s) = c_\omega(s+1)$ et donc $c_\omega$ se factorise par $p^{-\infty}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}_p$. Si $\omega|T_p = a_p\omega$, avec $|a_p|_p = 1$, alors on définit la distribution sur $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu \times \Gamma$, en se rappelant que $\Gamma_{m+1} \cong p^m\mathbb{Z}_p$,

$$\Phi_\omega(z + p^m\mathbb{Z}_p) = a_p^{-m} \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c_\omega(z/p^m).$$

On peut voir qu'elle est vraiment une distribution puisque elle respecte la relation de distribution et qu'elle est bornée. Il existe donc une unique mesure qui la prolonge. Soit $\mu_{\omega,j}$ la projection de $\Phi_\omega$ sur $\binom{n}{j}X^{m-j}Y^y$ ; elle est une mesure dans $K$. On veut démontrer que $\mu_{\omega,j} = x^j\mu_{\omega,0}$ ; pour faire cela, on suppose que $\omega$ soit entière, en la multipliant par une constante opportune (on change $|a_p|_p$, mais pour cette partie on n'a pas besoin qu'il soit un'unité $p$-adique). Soit donc $\phi$ dans $C(\mathbb{Z}_p^\times, A)$ et $\phi_k$ une fonction continue localement constante de sur $\mathbb{Z}/p^{k'}\mathbb{Z}$ tel que $|\phi - \phi_k|_p \leq p^{-k}$, $k' \geq k$. Alors on a, puisque on a supposé $\Phi_\omega$ entière,

$$\begin{aligned}
\Phi_\omega(\phi_k) &= \sum_{(z,p)=1, z=1}^{p^{k'}-1} \phi_k(z) a_p^{-k'} \begin{pmatrix} p^{k'} & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c_\omega(z/p^{k'}) \\
&= a_p^{-k'} \sum_{j=0}^{m} \sum_{(z,p)=1, z=1}^{p^{k'}-1} \phi_k(z)(X+zY)^{m-j}(p^{k'}Y)^j c_j(z/p^{k'})(\omega) \\
&\equiv a_p^{-k'} \sum_{(z,p)=1, z=1}^{p^{k'}-1} \phi_k(z)(X+zY)^m c_0(z/p^{k'})(\omega) \bmod p^{k'} \\
&\equiv \sum_{j=0}^{m} \int \phi(z) z^j \mathrm{d}\mu_{\omega,0} \binom{m}{j} X^{m-j}Y^j \bmod p^{k'}.
\end{aligned}$$

où $c_j(z/p^{k'})(\omega)$ est le coefficient de $X^{m-j}Y^j$ dans $c_\omega(z/p^{k'})$. En prenant la limite on a donc

$$\mu_{\omega,j} = z^j\mu_{\omega,0}.$$

Soit $\omega = \nu(\delta_\pm(f))$ et $\Phi^\pm$ la mesure correspondante, on a pour un caractère $\phi$ de $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$

$$\int \phi(z)\mathrm{d}\Phi^\pm = \lambda(T_p)^{-r} \begin{pmatrix} p^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega^\pm(f)^{-1} \sum_{(z,p)=1, z=1}^{p^r-1} \begin{pmatrix} 1 & -z/p^r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi(z)\mathrm{Int}_{j/N}(\omega_\pm(f)).$$

Donc si $f$ est ordinaire de niveau plus grand que 1, on a une mesure $\mu^\pm = \mu_{\nu(\delta_\pm(f)),0}$ tel que pour tout caractère $\phi$ on a

$$\int \phi(z) z^j \mathrm{d}\mu^\pm = \lambda(T_p)^{-j} p^{rj} \frac{G(\phi)L(f \otimes \phi^{-1}, 1+j)}{(-2\pi i)^j \Omega^\pm(f)} \quad 0 < j < k-1$$

si le signe de $\mu^\pm$ est tel que $1 \pm \phi^{-1}(-1)(-1)^j$ est non null $1 \pm \phi^{-1}(-1)(-1)^j$, 0 sinon. Si $f$ est de niveau 1, alors

$$\int \phi(z) z^j \mathrm{d}\mu^\pm = \beta^{-j} p^{rj} \frac{G(\phi)(1 - \alpha\phi^{-1}(p)p^{-1-j})L(f \otimes \phi^{-1}, 1+j)}{(-2\pi i)^j \Omega^\pm(f)}$$

pour $0 < j < k-1$ et si le signe de $\mu^{\pm}$ est tel que $1 \pm \phi^{-1}(-1)(-1)^j$ est non null, 0 sinon. $\alpha$ et $\beta$ sont comme après 1.4.3. Le facteur $(1-\alpha\phi^{-1}(p)p^{-1-j})$ est différent de 1 seulement si $\phi$ est trivial et dans ce cas il est nécessaire, puisque il est le facteur qui diffère entre $L(f,a)$ et $L(f',s)$, pour $f'$ la forme ordinaire de niveau augmenté.
Pour $f$ et $\psi$ fixés, on peut donc définir

$$L_p(f \otimes \psi, s) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \psi^{-1} \langle z \rangle^{s-1} \mathrm{d}\mu_\psi,$$

où $\mu_\psi$ est $\mu_\pm$, avec le signe choisi en accord avec $1 \pm \phi^{-1}(-1)(-1)^j$, tel que il ne soit pas nul.

# Chapitre 3

# Les fonctions $L$ en deux variables pour le carré symétrique

Le but de ce chapitre est la preuve de l'existence d'un fonction $p$-adique en deux variable qui soit interpolant pour la fonction $L$ de la représentation adjointe à la représentation automorphe associée à une forme propre normalisée. Soit $\hbar^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ l'algèbre ordinaire de niveau $N$, $\mathcal{I}$ la clôture intégrale d'une composant irréductible de $\hbar^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$, $\lambda$ la projection de $\hbar^{ord}(\Gamma_1(N); \mathcal{O}_K)$ sur $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ le $\overline{\mathbb{Q}}_p$-points arithmétique de $\mathcal{I}$ et $\psi$ le caractère de $\mathcal{I}$. Pour tour $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, soit $f_P$ la forme propre correspondante à $P \circ \lambda$. On pose $f_P^\circ$ la forme primitive associé à $f_P$ et $\psi_1$ (resp. $\psi'$) la restriction de $\psi$ à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ (resp. $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ ) et $\psi_P = \varepsilon_P \psi_1 \omega^{-k(P)}$. Soit $r_0(P)$ le conducteur de $f_P^\circ$, qui est donc $r(P)$ si $f_P$ est primitive ou sinon 0 (dans lequel cas $\psi_P$ est trivial).
À la représentation automorphe $\pi(P)$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ associée à la forme propre normalisée primitive $f_P^\circ$ Gelbart et Jacquet associent le lift à $\mathrm{GL}(3, \mathbb{A})$ qui coïncide avec la représentation au carré symétrique et qu'on appelle $\widehat{\pi}(P)$. La fonction $L$ de $\widehat{\pi}(P)$ a une formulation comme produit d'Euler qui coïncide pour tout $l$ au dehors de $Np$ avec $D_l(l^{-k(P)+1-s})$, où

$$D_l(X) = (1 - \psi'\psi_P(l)\alpha^2 X)(1 - \psi'\psi_P(l)\alpha\beta X)(1 - \psi'\psi_P(l)\beta^2 X),$$

pour $\alpha$ and $\beta$ racines de

$$X^2 - a(l, f_P)X + \psi'\psi_p(l)l^{k(P)-1}.$$

Pour tout caractère de Dirichlet $\chi$, posons

$$L(s, f_P, \chi) = L(s - k(P) + 1, \widehat{\pi}(P) \otimes \chi).$$

Cette fonction est la fonction $L$ associé à la représentation adjointe de $\pi(P)$, qui diffère de la représentation au carré symmetrique par le tordue par $\det^{-1}$ ($\mathrm{Sym}^2 = \det \otimes \mathrm{Ad}$) ; c'est indépendante du tordu de $f_P$, donc on peut supposer que $f_P$ soit minimale. Le valeurs critiques pour $L(s, f_P, \chi)$ au sense de Deligne [Del79, Définition 1.3] et [Sch88, §1] sont compris entre 1 et $2k(P)-2$, et correspond aux $n$ pour lequels $\chi(-1) = (-1)^{n+1}$, et pour l'équation fonctionnelle on peut se restreindre aux entiers entre 1 et $k(P)-1$. Il est connu par les travaux de Sturm [Stu89], [Stu80] que

$$\frac{L(n,f_P,\chi)}{(2\pi i)^{n-2}\Omega(P)}$$

est, pour $n$ critique et $\Omega(P)=(2i)^{k(P)+1}\pi^2\langle f_P^\circ,f_P^\circ\rangle$, algébrique et aussi $p$-entier (comme on peut déduire de la preuve du théorème 3.5.1).
On donne des rappels sur la théorie de "root number" ; comme on a déjà dit, si $f$ est primitive de niveau $N$, alors on a

$$f_P|_k=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}=W(f)f^c.$$

$W(f)$ apparaît dans l'équation fonctionnelle de $L(s,f_P)$ et par la philosophie du programme de Langlands, on peut décomposer $W(f)$ en parties locales. On pose $W_p(f)$ la partie en $p$ et $W'(f)=W(f)/W_p(f)$. On a, si $\pi(f)_p$ n'est pas super cuspidal (si $f$ est ordinaire, cela est le cas) et si $f$ est $p$ minimal de caractère $\psi$, on a [Hid88b, 5.5bis],

$$W_p(f)=\left(\psi'(p)a(p,f)^cp^{-k/2}\right)^{r_0}G(\psi_p),$$

ou $r_0$ est la puissance de $p$ dans le conducteur de $f$ et $G(1)=1$.
On suppose toujours que $\eta$ soit un caractère primitif et posons respectivement $C(\eta)$, $G(\eta)$, $\eta'$ et $\eta_1$ le conducteur, le somme de Gauss, la partie prime à $p$ et la $p$-partie de $\eta$. Soit $\xi$ un caractère de Dirichlet modulo $Jp$ de conducteur divisible par $J$ et $(Q,P)$ points dans $\mathcal{A}(\Lambda)\times\mathcal{A}(\mathcal{I})$. Posons $\eta_Q=\xi\varepsilon_Q\omega^{1-k(Q)}$, $\delta(Q)$ tel que $p^{\delta(Q)}$ soit $p$-partie du conducteur de $\eta_Q$ et $\eta=\psi'\psi_P\eta_Q^{-1}$. Maintenant on définit le facteur d'Euler pour $p$ pour la fonction $L$ p-adique ; soit

$$E(Q,P)=E_1(Q,P)E_2(Q,P),$$

avec

$$E_1(Q,P)=(1-\eta^{-1}\psi'\psi_P(p)\lambda_P(T_p)^{-2}p^{k(Q)-1})\left(\psi'(p)\lambda_P(T_p)^{-2}\right)^{\delta(Q)},$$

et $E_2(Q,P)$, respectivement dans le cas $f_P\neq f_P^\circ$ et $f_P=f_P^\circ$

$$\begin{cases} (1-\eta(p)p^{k(P)-k(Q)-1})(1-\eta\psi'\psi_P(p)\lambda_P(T_p)^{-2}p^{2k(P)-k(Q)-2}), \\ 1. \end{cases}.$$

On termine avec $S(P)$ qui, si $f_P\neq f_P^\circ$ ou $\psi_P$ est non trivial, est

$$\left(1-\frac{\psi'\psi_P(p)p^{k(P)-1}}{\lambda_P(T_p)^2}\right)\left(1-\frac{\psi'\psi_P(p)p^{k(P)-2}}{\lambda_P(T_p)^2}\right)\left(\frac{\psi'(p)\lambda_P(T_p)^{2^c}}{p^{k(P)}}\right)^{r_0(P)}$$

et -1 si $f_P=f_P^\circ$ et $\psi_P$ est trivial (et alors $k(P)=2$, comme on a dit après 1.6.3). On peut donc donner le théorème suivant

**Théorème 3.0.1.** *Soit $\lambda:\mathscr{h}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)\to\mathcal{I}$ primitif et minimal. $\xi$ un caractère modulo $Jp$, de conducteur divisible par $J$ et tel que $\xi(-1)=1$. À moins que $\xi'\psi'^{-1}$ est quadratique immaginaire et $\lambda$ a multipliction complexe par ce corps quadratique (i.e. pour le caractère de Dirichlet de cette extension $\chi_{-d}$, on a $\lambda_P(T_l)=\chi_{-d}(l)\lambda_P(T_l)$ pour presque tout $l$) alors il existe un unique $L$ dans le corps des fractions de $\Lambda\otimes\mathcal{I}$ tel que*

**i)** *Pour tout $H$ dans $\mathcal{I}$ qui annule $\boldsymbol{C}(\lambda)$, alors $HL \in \Lambda \otimes \mathcal{I}$*

**ii)** *Pour tout $(Q, P)$ dans $\mathcal{A}(\Lambda) \times \mathcal{A}(\mathcal{I})$ qui satisfont $1 \leq k(Q) < k(P) - 1$, on a*

$$L(Q,P) = c(Q,P)S(P)^{-1}E(Q,P)\frac{L(k(Q), f_P, \psi_P\psi'\eta_Q^{-1})}{(2\pi i)^{k(Q)-2}\Omega(P)}$$

*où*

$$c(P,Q) = (k(Q)-1)!C(\eta_Q)^{k(Q)-1}G(\eta_Q)N^{\frac{-k(P)}{2}}W'(f_P)^{-1}G(\psi_P)^{-1}\psi'(p)^{\delta(Q)}.$$

## 3.1 Le changement de base de Gelbart et Jacquet

On introduit d'abord la représentation associé à une forme modulaire en suivant [PS79a] et [PS79b]. Soit $f$ une forme modulaire pour un sous-groupe de congruence $\Gamma$. Soient $G = \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{Q})$, $L(f,s)$ comme dans 1.3 et définissons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\Pi(f) = \left\{ f(\gamma(z))(cz+d)^{-k} : \gamma \in G \right\}.$$

Il est claire que $G$ agit sur $\Pi(f)$ et donc on a une représentation de $G$. Hecke a démontré que l'action est irréductible si et seulement $L(f,s)$ a un produit d'Euler. Il est donc équivalent au fait que $f$ soit une forme propre pour les opérateurs de Hecke. Chaque $h$ dans $\Pi(f)$ est fixé par un sous-groupe de congruence $\Gamma_h$ de $G$ et on considère la complété pro-fini $\overline{G}$ de $G$ par rapport a ces sous-groupes. $\overline{G}$ est donc un sous-groupe de $\prod_p \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$, où le produit est restreint à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$. On a donc une représentation $\pi$ sur les adèles finies, qui se décompose comme produit tensoriel restreint de représentations $p$-adiques. On peut ajouter aussi une représentation sur la place infinie. Si on a deux telle représentations $\pi_1$ et $\pi_2$ irréductibles, qui se décomposent en produit tensoriel des représentations $\pi_{i,p}$ du groupe local $G_p$, alors sont les mêmes si et seulement si il coïncident sur tous les places, excepte un nombre fini entre eux (Stong multiplicity one theorem).
Gelbart et Jacquet dans [GJ76] associent à une représentation automorphe $\pi$ de $\mathrm{GL}(2)$ une représentation $\widehat{\pi}$ de $\mathrm{GL}(3)$. Elle est isomorphe à le représentation au carré symétrique de $\pi$. On a

$$L(s, \widehat{\pi} \otimes \chi) = \frac{L(s, \pi \otimes \chi \times \widetilde{\pi})}{L(s, \chi)}$$

pour $\widetilde{\pi}$ la représentation contragredient de $\pi$. Il est claire qu'il ne dépende pas du tordu de $\pi$ par caractère. Il est aussi facile à voir que si $\pi$ vient d'une forme propre pour les opérateurs de Hecke, alors le facteur de $\widetilde{\pi}$ coïncident avec les facteurs d'Euler définis ci-dessus. On démontre ensuite que $L(s, \widehat{\pi} \otimes \chi)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(s, \widehat{\pi} \otimes \chi) = \varepsilon(s, \widehat{\pi} \otimes \chi)L(1-s, \widehat{\pi} \otimes \chi^{-1})$$

et souvent elle n'a pas des pôles [Sch88, §1].
On introduit maintenant une autre fonction $L$, associé à la représentation carré

symétrique d'une courbe elliptique [CS87]. Soit $E$ une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, alors on y associe les modules de Tate

$$T_l(E) = \varprojlim_n E[l^n],\ V_l(E) = T_l(E) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l.$$

On a une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, puisque les points de torsion sont algébriques sur le corps de définition de $E$. Soit $H_l^1(E) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_l}(V_l(E), \mathbb{Q}_l)$ et $\mathrm{Sym}^2(H_l^1)$ le carré symétrique associé. $\mathrm{Sym}^2(H_l^1)$ est explicitement le sous-espace de $H_l^1(E) \otimes H_l^1(E)$ invariant par l'involution $x \otimes y \mapsto y \otimes x$. Pour tout $l$, on a donc une représentation $\rho_l$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ dans $\mathrm{GL}(\mathrm{Sym}^2(H_l^1))$. Il y a une façon canonique pour associer à une représentation du groupe de Galois de $\mathbb{Q}$ un produit d'Euler en choisissant, pour tout $p$ premier, un groupe de décomposition et d'inertie. Soit $l \neq p$ et $V = \mathrm{Sym}^2(H_l^1)^{I_p}$ pour $I_p$ le groupe d'inertie de $p$, on choisit dans le groupe de décomposition $Frob_p$, qui correspond au Frobenius géométrique $x \mapsto x^{-p}$ du corps résiduel, on a alors

$$D'_p(X) = \det(1 - \rho_l(Frob_p)X|_V) \in \mathbb{Q}_l[X]$$

qui ne dépend pas de $l$. La fonction $L$ qu'on définit de suit satisfait la même équation fonctionnelle que la fonction $L$ associé à $\widehat{\pi}$ ci-dessus. Si $E$ est associe, par le théorème de modularité, à une forme modulaire $f$, on voit que le facteur d'Euler $D_l(X)$ et $D'_l(X)$ coïncident pour presque tout $l$ et puisque tout le deux satisfont la même équation fonctionnelle, ils doivent coïncider, mais on peut voir cela directement [Hid90, Proposition 6.1].

Maintenant on veut donner explicitement les facteurs de $L(s, \widehat{\pi} \otimes \chi)$ puisque on aura besoin de cela ensuite pour l'interpolation $p$-adique. Fixons $f$ et soient $\psi$ son nebentypus et $\pi$ sa représentation automorphe. Posons $\alpha = \psi\chi$, nous sommes intéressés aux $L(s, \pi \otimes \alpha^{-1})$ ; posons $L(s, \pi_l \otimes {\alpha_l}^{-1})$ le facteur à $l$ de $L(s, \pi \otimes \alpha^{-1})$, où $\pi_l$ et $\alpha_l$ sont les parties locales de $\pi$ et $\alpha$. Supposons que $\alpha_l^2$ soit non ramifié (sinon, $L(s, \pi_l \otimes {\alpha_l}^{-1}) = 1$) et soit $\mu_l$ ($\lambda$ dans [Sch88]) le caractère de $\mathbb{Q}_l^\times$ d'ordre deux qui sur $\mathbb{Z}_p^\times$ (le groupe d'inertie) coïncide avec $\alpha_l$ (donc $\alpha_l\mu_l$ est non-ramifié) $\eta_l$ la caractère de $\mathbb{Q}_l^\times$ d'ordre deux qui n'est pas ramifié (donc il est la valuation $l$-adic modulo 2). Posons $\prod_l l^{e(l)} = C(f)/C(\psi)$ et quand on demande que $\alpha_l^2$ soit non-ramifié, on suppose toujours que $\alpha_l$ soit ramifié. On a don [Hid90, §6]

$$\Sigma = \{l : \pi_l \text{ est super cuspidal}\} = \{l : e(l) > 0, e(l) \equiv 0 \bmod 2\},$$

$$\Sigma_0 = \{l \in \Sigma : \alpha_l \text{ est non-ramifié et } \pi_l \cong \pi_\otimes \eta_l\},$$

$$\Sigma_1 = \left\{l \in \Sigma : \alpha_l^2 \text{ est non-ramifié et } \pi_l \cong \pi_l \otimes \mu_l \text{ et } \pi_l \ncong \pi_l \otimes \mu_l\eta_l\right\},$$

$$\Sigma_2 = \left\{l \in \Sigma : \alpha_l^2 \text{ est non-ramifié et } \pi_l \ncong \pi_l \otimes \mu_l \text{ et } \pi_l \cong \pi_l \otimes \mu_l\eta_l\right\},$$

$$\Sigma_0 = \left\{l \in \Sigma : \alpha_l^2 \text{ est non-ramifié et } \pi_l \cong \pi_l \otimes \eta_l \cong \pi_l \otimes \eta_l\right\},$$

$$\Xi = \{l|N : \pi_l \text{ est principale }\} = \{l|N : (N/C(\psi_l), l) = 1\}.$$

Les expressions explicites pour chaque facteur sont les suivantes [Sch88, §1].

**Proposition 3.1.1.** *Si $l \in \Xi$, alors*

$$L(s-k+1, \pi_l \otimes \alpha_l^{-1})^{-1} = D_l(\chi_0(l)l^{-s})(1-(\psi^2\chi)_0(l)\overline{a(f,l)}^2 l^{-s})(1-(\psi^2\chi)_0(l)l^{-s+k-1})$$

*Si $l \in \Sigma_0$ (resp. $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, ), alors*

$$\begin{array}{rcl} L(s, \pi_l \otimes \alpha_l)^{-1} & = & (1 + \alpha_l(l)l^{-s}) \\ L(s, \pi_l \otimes \alpha_l)^{-1} & = & (1 - \alpha_l\mu_l(l)l^{-s}) \\ L(s, \pi_l \otimes \alpha_l)^{-1} & = & (1 + \alpha_l\mu_l(l)l^{-s}) \\ L(s, \pi_l \otimes \alpha_l)^{-1} & = & (1 - \alpha_l^2(l)l^{-s}) \end{array}$$

L'idée à la base de la preuve de cela est l'étude des pôles de $L(s, \pi \otimes \alpha \times \widetilde{\pi})$, qui sont simples.

## 3.2 Les formes modulaires de poids demi-entier

On introduit maintenant les formes modulaires de poids demi-entier. D'abord, pour un'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, on pose $\chi_m$ le seul caractère de Dirichlet correspondant à l'extension, qui correspond à le symbole d'Artin. On fixe, pour un nombre complexe $z$, que $\sqrt{z}$ a argument dans $(-\pi/2, \pi/2]$ et $z^{k/2} = \sqrt{z}^k$. Considérons la série thêta

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z}$$

qui est associé a la forme quadratique $x^2$ définie sur $\mathbb{Z}$. Posons, pour $\gamma$ dans $\Gamma_0(4)$,

$$j(\gamma, z) = \frac{\Theta(\gamma(z))}{\Theta(z)}.$$

On peut voir que, pour $\epsilon(d) = i$ si $d \equiv 3 \bmod 4$ et $\epsilon(d) = -1$ si $d \equiv 1 \bmod 4$ [Kob93, III, §4 Theorem 1]

$$j(\gamma, z) = \epsilon(d)^{-1} \left(\frac{c}{d}\right) (cz + d)^{1/2}$$

et donc

$$j(\gamma, z) = \chi_{-1}(d)(cz + d).$$

On sait que $d$ ne peut pas être pair puisque 4 divise $c$.
On définit donc l'opérateur $|_{k/2}\gamma$ pour $k$ impair

$$\begin{array}{rcl} f|_{k/2}\gamma(z) & = & f(\gamma(z))j(\gamma, z)^{-1}(cz + d)^{-(k-1)/2} \\ & = & f(\gamma(z))\epsilon(d)^{-1} \left(\frac{c}{d}\right) (cz + d)^{-k/2}. \end{array}$$

On définit alors, pour $\Delta$ un sous-groupe de congruence de $\Gamma_0(4)$ l'espace $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta)$, qui consiste de formes modulaires de poids demi-entier, comme l'ensemble des fonctions complexes et holomorphes sur $\mathfrak{H}$ telles que

$$f|_{k/2}\gamma = f \text{ pour tout } \gamma \in \Delta,$$

$$a(n/N, f|_k\gamma) = 0 \text{ pour } n < 0 \text{ et } \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}).$$

et on définit l'espace de forme paraboliques $\mathcal{P}_{k/2}(\Delta)$ en imposant que $f$ soit nulles sur les cusps. Avec la définition naïf de l'opérateur $|_{k/2}\gamma$, $f|_{k/2}\gamma = f(\gamma(z))(cz+d)^{-k/2}$, on a que la seule forme modulaire de poids demi-entier est 0.
On définit maintenant les formes modulaires $p$-adiques de poids demi-entier ; on suppose que $\Delta$ contient $\Gamma_1(N)$ pour un certain $N$. Avec la $q$-expansion on peut penser $\mathcal{G}(\Delta)$ dans $\mathbb{C}[[q]]$. Pour $A$ sous-anneau de $\mathbb{C}$, on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{k/2}(\Delta; A) &= \mathcal{G}_{k/2}(\Delta) \cap A[[q]],\\ \mathcal{P}_{k/2}(\Delta; A) &= \mathcal{P}_{k/2}(\Delta) \cap A[[q]].\end{aligned}$$

On définit ensuite

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{k/2}(\Delta; \overline{\mathbb{Q}}_p) &= \mathcal{G}_{k/2}(\Delta; \overline{\mathbb{Q}}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p,\\ \mathcal{P}_{k/2}(\Delta; \overline{\mathbb{Q}}_p) &= \mathcal{P}_{k/2}(\Delta; \overline{\mathbb{Q}}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p,\end{aligned}$$

comme sous-algèbres de $\overline{\mathbb{Q}}_p[[q]]$. Pour tout $A$ sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on définit $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta; A)$ et $\mathcal{P}_{k/2}(\Delta; A)$ par intersection avec $A[[q]]$. On pose aussi pour un caractère de Dirichlet modulo $N$

$$\mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_0(N), \chi; A) = \left\{ f \in \mathcal{G}(\Gamma_1; A) : f|_{k/2}\gamma = \chi(d) f \right\}.$$

Si $A$ est un corps dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ou $\mathbb{C}$, alors on a

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_1(N); A) &= \mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_1(N); \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} A,\\ \mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_0(N), \chi; A) &= \mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{Q}(\chi)) \otimes_{\mathbb{Q}(\chi)} A.\end{aligned}$$

Cela est dû au fait qu'il y a une base sur $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}(\chi)$) [Hid90, §2].
Soit $K$ un'extension de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, posons $\Delta(p^r) = \Delta \cap \Gamma_1(p^r)$ et on définit alors

$$\mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^\infty)) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^r); K) \text{ dans } K[[q^{1/N}]],$$

$$\mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^\infty); \mathcal{O}_K) = \mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^\infty); K) \cap \mathcal{O}_K[[q^{1/N}]],$$

$$\mathcal{G}(\Delta(p^r); K) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{G}_{m+1/2}(\Delta(p^r); K) \ r = 1, \ldots, \infty,$$

$$\mathcal{G}(\Delta(p^r); \mathcal{O}_K) = \mathcal{G}(\Delta(p^r); K) \cap \mathcal{O}_K[[q^{1/N}]] \ r = 1, \ldots, \infty.$$

Si $K$ est un'extension finie de $\mathbb{Q}_p$, alors il est complet et on peut considérer la complété des espaces ci-dessus par la topologie $p$-adique de $K[[q^{1/N}]]$. En particulier $\overline{\mathcal{G}}(\Delta(p^\infty); K)$ est l'espace des formes modulaires $p$-adique de poids demi-entier. Dans la même façon on construit les espaces pour les formes paraboliques.

**Théorème 3.2.1.** *Soit $A$ un entre $K$ et $\mathcal{O}_K$, $\Gamma_0(4) \supset \Delta \supset \Gamma(N)$ pour $N$ prime à $p$. Alors, pour tout $r \geq 1$, $\overline{\mathcal{G}}(\Delta(p^r); A)$ et $\overline{\mathcal{P}}(\Delta(p^r); A)$ coïncident avec $\overline{\mathcal{G}}(\Delta(p^\infty); A)$ et $\overline{\mathcal{P}}(\Delta(p^\infty); A)$.*

*Démonstration.* On démontre le théorème seulement pour $A = \mathcal{O}_K$, $r = 1$ et $\overline{\mathcal{G}}(\Delta(p^r); \mathcal{O}_K)$, puisque les autres cas sont similaires. Notons d'abord que $\Theta$ est une unitè dans $\mathbb{Z}[[q]]$ et ella n'a pas des zéros dans $\mathfrak{H}$. Soit $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}(\Delta(p); A)$, qui est la complété de $\mathcal{M}_0 = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(\Delta(p); \mathcal{O}_K)$. Soient $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}(\Delta(p^\infty); \mathcal{O}_K)$ et $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(\Delta(p); \mathcal{O}_k)$. Il est claire que $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}$ sont des modules sur $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}$ par la multiplication dans $\mathcal{O}_K[[q^{1/N}]]$. Soit $\mathcal{A}$ le corps des fractions de $\mathcal{M}$ et soit $\Theta^{-2}\mathcal{M}$ dans $\mathcal{O}_K[[q^{1/N}]]$ ; il est la complété de $\Theta^{-2}\mathcal{M}_0$ par la norme $p$-adique. Soit $Y_r = \Delta(p^r) \backslash \mathfrak{H}$ et $X_r$ sa compactification canonique. Posons $C_r$ les cusps de $X_r$ et $S_r$ les cups de $X_r$ qui ne sont pas ramifiées sur $X_0$. Si on pose $\overline{\Delta}$ l'image de $\Delta$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ et $U_N = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right\}$, on a

$$C_0 \cong \overline{\Delta} \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/U.$$

Une cusp $s$ est non ramifié sur $X_0$ si et seulement si ses stabilisateurs dans $\Delta$ et $\Delta(p^r)$ coïncident. On se réduit à $s = \infty$ et on voit que son $U_{Np^r}$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})$ est normalisé par les matrices triangulaires supérieures et on a donc

$$S_r = \begin{cases} C_0 \times (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times & \text{si } -1 \notin \Delta \\ C_0 \times (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times / \{-1\} & \text{si } -1 \in \Delta \end{cases}$$

On peut donc définir l'espace $C(C_0 \times \mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_K)$ de fonctions continues vers $\mathcal{O}_K$. Comme on a déjà vu, on a une action soit de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ que de $\mathbb{Z}_p^\times$ sur $\mathcal{M}$, on peut donc définir un plongement

$$\begin{array}{cccc} \iota & : & \Theta^{-2}\mathcal{M} & \longrightarrow & C(C_0 \times \mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_K)((q^N)) \\ & & f & \longmapsto & \sum_{-\infty << n}^{\infty} a(n, \iota(f)) q^{n/N}, \end{array}$$

où $a(n, \iota(f)) : (s, z) \mapsto a(n, f|sz)$.
Pour $s$ dans $C_0$, on pose

$$v_s(f) = \min \left\{ n : z \mapsto a(n, f|sz) \text{ est non-null sur } \mathbb{Z}_p^\times \right\},$$

$$\mathcal{X} = \left\{ f \in \Theta^{-2}\mathcal{M} : v_s(f) \geq -v_s(\Theta^2)/2 \text{ pour tout } s \in C_0 \right\},$$

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ f \in \mathcal{X} \cap \Theta^{-2}\mathcal{M}_0 : f \text{ est holomphe en tout } s \in C_1 \setminus S_1 \right\}.$$

Maintenat, posons $t = p^n(p-1)$ et $\mathbf{E}_t$ pour $\frac{B_t}{t} E_t$ et définissons

$$G_n = \mathbf{E}_t - p^{t-1}\mathbf{E}_t|[p] = \mathbf{E}_t|(1 - T_p).$$

On a $G_t \equiv 1 \bmod p^n$ et $a(0, G_n|\gamma) = 0$ pour $\gamma$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \backslash \Gamma_0(p)$. Pour justifier la deuxième affirmation, notons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_0(p)$ est $\Gamma_0(p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Gamma_0(p)$ et que un $\gamma$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_0(p)$ commute avec $T_p$ et que $T_p$ ne change pas $a(0, f)$. Puisque $\Theta^{-2}\mathcal{M}_0$ est dense $\Theta^{-2}\mathcal{M}$, on a pour $f$ dans $\mathcal{X}$ que $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. Si on choisit $m$ suffisamment grand, alors $G_n^m f_n$ est dans $\mathcal{X}_0$ et $G_n^m f_n$ est très proche à $f_n$ et alors on a que $\mathcal{X}_0$ est dense dans $\mathcal{X}$. Puisque $\Theta$ envoie $\mathcal{M}_{(k-1)/2}(\Delta)$ dans $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta)$, on a que $\Theta\mathcal{X} \supset \mathcal{G}$, mais il est clair que $\mathcal{G}_0 \supset \Theta\mathcal{X}_0$. En prenant la complété on a le théorème. $\square$

On sait que si $\sigma$ dans $\Gamma_0(4)$ normalise $\Delta$, alors l'action $f \mapsto f|_{k/2}\sigma$ préserve $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta;\overline{\mathbb{Q}})$ et cela induit une action de $\sigma$ sur $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta;\overline{\mathbb{Q}}_p)$ qu'on écrit avec la même notation. Pour $z$ dans $\mathbb{Z}_p^\times$, on définit sa action sur $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^r);\overline{\mathbb{Q}}_p)$

$$f||z = z^{(k+1)/2} f|_{k/2}\sigma,\ f|z = z^{(k-1)/2} f|_{k/2}\sigma = z^{-1} f||z \tag{3.2.2}$$

pour $\sigma$ dans $\Gamma_0(4)$, $\sigma \equiv \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \bmod p^r$ et $\sigma \equiv I \bmod N$. Si $\Delta = \Gamma_1(N)$ ou $\Gamma_0(N)$, alors on définit l'action de $Z_N = \mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/NZ)^\times$ par

$$f||(z,\zeta) = \chi_{-1}(\zeta) z^{(k+1)/2} f|_{k/2}\sigma,\ \ f|(z,\zeta) = \chi_{-1}(\zeta) z^{-1} f||z \tag{3.2.3}$$

où $\sigma \equiv \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \bmod p^r$ et $\sigma \equiv \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \bmod N$. On prolonge ces actions sur $\mathcal{G}(\Delta(p^r);\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et on a le théorème suivant [Hid90, Theorem 2.2].

**Théorème 3.2.4.** *Soit $A = K$ ou $\mathcal{O}_K$, alors les actions $||z$ et $|z$ (resp. $||(z,\zeta)$ et $|(z,\zeta)$) préservent $\mathcal{G}(\Delta(p^r);A)$ et $\mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^r);A)$ (resp. $\mathcal{G}(\Gamma_1(Np^r);A)$ et $\mathcal{G}_{k/2}(G_1(Np^r);A)$) et se prolongent sur leur complété.*

On a pour $k$ impair et $k'$ dans $\mathbb{Z}$ un produit

$$\mathcal{M}_{k'}(\Delta(p^r);\mathcal{O}_K) \times \mathcal{G}_{k/2}(\Delta(p^r);\mathcal{O}_K) \to \mathcal{G}_{k'+k/2}(\Delta(p^r);\mathcal{O}_K)$$

donné par la multiplication dans $\mathcal{O}_K[[q^{1/N}]]$, qui induit

$$\mathcal{M}(\Delta(p^r);\mathcal{O}_K) \times \mathcal{G}(\Delta(p^r);\mathcal{O}_K) \to \mathcal{G}(\Delta(p^r);\mathcal{O}_K)$$

qui est uniformément continue pour le norme $p$-adique. On peut donc donner une structure de $\overline{\mathcal{M}}(\Delta(p);\mathcal{O}_K)$-module à $\overline{\mathcal{G}}(\Delta(p^\infty);\mathcal{O}_K)$ et on a pour $f$ de poids entier et $g$ de poids demi-entier

$$fg|z = f|zg||z \text{ pour } z \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ ou } z \in Z_N \text{ si } \Delta = \Gamma_1(N).$$

Dans la même façon on a un produit

$$\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K) \times \overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K) \to \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K)$$

qui satisfait $fg|z = f|z \cdot g||z$.
On peut définir les opérateurs

$$\begin{array}{cccc} [t] & : & \overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(tNp);\mathcal{O}_K) \\ & & f = \sum_n a(n,f)q^n & \longmapsto & \sum_n a(n,f)q^{tn} \end{array}$$

qui induit une morphisme de $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(Np),\chi;\mathcal{O}_K)$ vers $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(tNp),\chi\chi_t;\mathcal{O}_K)$ et $\tau_{Np^r}$

$$f|\tau_{Np^r} = \begin{cases} f(-1/Np^r z)(Np^r)^{-k/4}(-iz)^{-k/2} & \text{si } f \in \mathcal{G}_{k/2} \\ f(-1/Np^r z)(Np^r)^{-k/2}(-iz)^{-k} & \text{si } f \in \mathcal{M}_k. \end{cases}$$

Au moins d'un facteur $(-i)^k$, il coïncide avec $\tau'_{Np^r}$ définit dans 1.3. On a

$$\tau_{Np^r}^2 = \begin{cases} 1 & \text{sur } \mathcal{G}_{k/2} \\ (-i)^k & \text{sur } \mathcal{M}_k. \end{cases}$$

Si on a une fonction $\phi$ sur $\mathbb{Z}/Mp^s\mathbb{Z}$ on peut définir l'opérateur de tordu de $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(Np), \mathcal{O}_K)$ vers $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(NM^2p), \mathcal{O}_K)$, qui est explicitement donné par

$$a(n, f|\phi) = \phi(n)a(n, f).$$

On peut généraliser le tordu pour toute fonction continue $\phi$ de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ ; on prende une suite des fonctions localement constantes $\phi_n$ qui convergent uniformément à $\phi$ et on pose $f|\phi = \lim_{n\to\infty} f|\phi_n$. Si $M = 1$ et $\phi = Id_{\mathbb{Z}_p}$, alors on a l'opérateur de dérivation $d$ tel que $a(n, df) = na(n, f)$. Puisque $e \circ d = 0$, on a $e(fdg) = -e(gdf)$

On introduit les séries d'Eisenstein de poids demi-entier, soient $k > 0$ impair et $\xi$ un caractère de Dirichlet modulo $Lp^r$ ($L$ et $p$ premiers entre eux) tel que $\xi(-1) = (-1)^{(k-1)/2}$, on pose

$$E^*_{k/2}(z, s; \xi) = L(2s+k-1, \xi^2) \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(Lp^r)} \xi\chi_{Lp^r}\chi_{-1}^{\frac{k-1}{2}}(\gamma)j(\gamma, z)^{-k}|j(\gamma, z)|^{-2s},$$

$$E_{k/2}(z, m; \xi) = (2\pi)^{\frac{m-k}{2}}(Lp^r)^{\frac{k-2m}{4}}\Gamma(\frac{k-m}{2})\left\{(2y)^{\frac{-m}{2}}E^*_{k/2}(z, -m; \xi)\right\}|_{k/2}\tau_{Lp^r}.$$

Si on pose $E_{k/2}(\xi) = E_{k/2}(z, 2-k; \xi)$, alors on a que $E_{k/2}(\xi)$ est dans les formes modulaires de poids demi-entier $\mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_1(Lp^r), \xi; \overline{\mathbb{Q}})$ et, par $\mu$ la fonction de Möbius, sa expansion en série de Fourier est

$$L(2-k, \xi^2) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n L\left(\frac{3-k}{2}, \xi\chi_n\right) \sum_{\substack{u^2t^2|n,\\ (ut,\, Lp)\,=\,1,\\ u\,>\,0,\, t\,>\,0}} \mu(u)\xi(ut^2)\chi_n(u)t(ut^2)^{\frac{k-3}{2}}. \tag{3.2.5}$$

On définit donc les opérateurs de Mass-Shimura

$$\partial_s = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{s}{2iy} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right),\ \partial_s^r = \partial_{s+2r-2}\cdots\partial_{s+2}\partial_s$$

alors pour $m$ impair entre $(k-1)/2$ et $k$ on a

$$E_{k/2}(z, m; \xi) = \partial^i_{j/2}E_{j-2}(z, 2-j; \xi),$$

où $i = (k-m)/2$ et $j = 2m+4-k$. Si $f$ est une forme modulaire de poids $s$, alors $\partial_s f$ est invariante par l'action de poids $s+2$ mais pas forcement holomorphe, puisque

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f\right)(\gamma(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(\gamma(z))(cz+d)^{-2} = cs(cz+d)^{s-1}f(z) + (cz+d)^s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z),$$

$$y^{-1}\circ\gamma = y^{-1}(cz+d)^2 - 2ci(cz+d).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\partial_s f|_{s+2}\gamma &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{s}{2iy\circ\gamma}f(\gamma(z))(cz+d)^{-s-2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(\gamma(z))(cz+d)^{-s-2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\left(\frac{s(cz+d)^2}{2yi} - \frac{2sci(cz+d)}{2i}\right)f(z)(cz+d)^{-2}+\right. \\
&\quad \left. + cs(cz+d)^{-1}f(z) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)\right) \\
&= \partial_s f.
\end{aligned}$$

On peut faire le même calcul pour les formes de poids demi-entier.

## 3.3 Séries thêta et formes modulaires quasi-holomorphes

Dans [Shi73] Shimura présente les séries $\theta$, qui peuvent produire beaucoup d'exemple de formes modulaires de poids demi-entier. Soit $n$ la dimension d'un espace vectoriel réelle, $A$ une matrice symétrique réelle de dimension $n$, $N$ un entier positif, $\alpha$ un entier non-négatif et $P$ une fonction sphericale de poids $\alpha$. Cela signifie que $P$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{C}$ tel que si $\alpha$ est 0, alors $P$ est constante, sinon

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i (q_i^t A\mathbf{x})^\alpha$$

pour $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$, $\beta_i$ dans $\mathbb{C}$ et $q_i$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $q^t A q = 0$. On choisit $h$ dans $\mathbb{Z}^n$ et on définit pour $z$ dans $\mathfrak{H}$ la série

$$\theta(z; h, A, N, P) = \sum_{m \equiv h \bmod N} P(m) e^{2\pi i z \frac{m^t A m}{2N^2}}.$$

Suppons maintenant que $A$ et $NA^{-1}$ ayant coefficients dans $\mathbb{Z}$ et que $Ah$ soit dans $\mathbb{Z}$, on a alors

**Théorème 3.3.1.** *Soit* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec* $b \equiv 0 \bmod 2$ *et* $c \equiv 0 \bmod 2N$, *alors*

$$\theta(\gamma(z); h, A, N, P) = e^{2\pi i ab \frac{h^t Ah}{2N^2}} \epsilon(d)^{-n} \left(\frac{detA}{d}\right) \left(\frac{c}{d}\right)^n (cz+d)^{\frac{n+2\nu}{2}} \theta(z; ah, A, N, P).$$

Soit $\phi$ un caractère modulo $r$ et $\alpha$ tel que $\phi(-1) = (-1)^\alpha$, posons

$$\theta(\phi) = \theta(z; \phi) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) n^\alpha e^{2\pi i n^2 z}.$$

On a le corollaire suivant

**Corollaire 3.3.2.** *Pour* $\theta(\phi)$ *comme avant, on a*

$$\theta(\gamma(z); \phi) = \phi(d) \left(\frac{-1}{d}\right)^\alpha j(\gamma, z)^{2\alpha+1} \theta(z; \phi).$$

*Elle est donc une forme modulaire de poids* $1/2$ *ou* $3/2$ *et niveau* $4r^2$. *Si* $\phi$ *est primitif modulo* $r$, *alors*

$$\theta\left(\frac{-1}{4r^2 z}; \phi\right) = (-1)^\alpha r^{\frac{-1}{2}} G(\phi) (-2riz)^{\frac{2\alpha+1}{2}} \theta(z; \overline{\phi}).$$

On définit maintenant le formes modulaires quasi-holomorphes. On pose pour $A$ un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et $m$ un entier positif $\mathcal{N}^m(A)$ comme l'espace de fonctions définies sur $\mathfrak{H}$ qui ont comme expansion de Fourier à l'infini

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, y) e^{2\pi i \frac{n(z+h)}{M}} \text{ pour } M \text{ entier et positif et } 0 \leq h < 1$$

où les $a(n, y)$ sont des polynômes en $(4\pi y)^{-1}$ de dégrée plus petit ou égal à $m$, à coefficients dans $A$. Soit $\Delta$ un sous-groupe de congruence et $k$ un entier ou demi-entier positif. On pose $\mathcal{N}_k^m(\Delta; A)$ comme le sous-espace de $\mathcal{N}^m(A)$ de fonctions $f$ tel que

$$f(\gamma(z))\varphi(z)^{-2} \in \mathcal{N}_k^m(\Delta; \mathbb{C}) \text{ pour tout } \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \text{ et}$$

$$\phi : \mathfrak{H} \to \mathbb{C} \text{ holomorphe et tel que } \phi(z)^2 = cz + d,$$

$$f|_k\gamma = f \text{ pour tout } \gamma \in \Delta.$$

Si $\psi$ est un caractère de $\Delta$ d'ordre fini, on pose avec de conditions similaires $\mathcal{N}_k^m(\Delta, \psi; A)$. On donne deux résultats du à Shimura, [Shi76].

**Lemme 3.3.3.** *Soit $g$ dans $\mathcal{N}_k^m(\Gamma_0(N), \psi; \mathbb{C})$ avec $k > 2m$, alors*

$$g = \sum_{n=0}^{m} \partial_{k-2n}^n g_n$$

*pour $g_n$ dans $\mathcal{M}_{k-2n}(\Gamma_0(N), \psi; \mathbb{C})$.*

*Démonstration.* On écrit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{m} y^{-n} g_n,\ g(\gamma(z))(cz + d)^{-k} = \sum_{n=0}^{m} y^{-n} f_n.$$

Par substitution de $z$ et $y$ dans la première expression et par confronte des coefficients de $y^{-m}$ on obtient $(cz + d)^{2m-k} g_m(\gamma(z)) = f_m(z)$ et $f_m = \psi(d)g_m$ si $\gamma$ est dans $\Gamma_0(N)$. Donc $g_m$ est dans $\mathcal{M}_{k-2m}(\Gamma_0(N), \psi; \mathbb{C})$ et $g - c\partial_{k-2m}^m g_m$ a degré en $y$ plus bas. On conclue par récurrence. □

On peut donc définir pour $k > 2m$

$$H : \mathcal{N}_k^m(\Gamma_0(N), \psi; A) \to \mathcal{M}(\Gamma_0(N), \psi; A)$$

qui envoie $g$ dans $g_0$. Et on peut faire le même avec les formes modulaires de poids demi-entier. On a le lemme suivant

**Lemme 3.3.4.** *Soit $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi; \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{M}_l(\Gamma_0(N), \chi; \mathbb{C})$ avec $k = l + 2m$, alors $\langle f, \partial_l^m g\rangle = 0$. En particulier, $\langle f, H(g)\rangle = \langle f, g\rangle$ pour tout $g \in \mathcal{N}_k^m(\Gamma_0(N), \psi; \mathbb{C})$.*

*Démonstration.* On a une expresion de $\partial_l^m$ en polynôme sur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ [Hid88b, 6.6]. On écrit donc $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$ et

$$\partial_l^m g = \sum_{j=0}^{m} (-4\pi y)^{j-m} c_j \sum_{n=0}^{\infty} b_n n^j q^n$$

et

$$\int_0^{\infty} y^{s-1} \int_0^1 \overline{f} \partial_l^m g \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (4\pi)^{-s} D(s - m, f, g) \sum_{j=0}^{m} c_j' \Gamma(s + j - m).$$

Mais dans la même façon que le théorème 1.3.3 on a que l'intégrale à gauche est

$$\int_{\Phi} \overline{f} g E^*_{k-l}(z, s+1-k; \psi\chi) y^{s-1},$$

où $E^*_{k-l}(z, s+1-k; \psi\chi)$ est le série d'Eisenstein en deux variables de poids entier

$$E^*_{k-l}(z, s+1-k; \xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(Lp^r)} \xi(\gamma) j(\gamma, z)^{-k} |j(\gamma, z)|^{-2s}.$$

Donc, au moins d'une constante, $\langle f, \partial_l^m g \rangle$ est le residue en $s = k$ de $D(s, f, g)$, qui est holomorphe, donc on à le résultat. $\square$

Si on définit le produit de Rankin entre $f$ dans $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ et $g$ dans $\mathcal{G}_{l/2}(\Gamma_0(N), \xi)$ comme

$$D(s, f, g) = L(2s - 2k - l + 3, (\psi\xi)^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n, f) b(n, g)}{n^{s/2}}$$

alors on a le lemme suivant [Hid90, Lemma 4.5]

**Lemme 3.3.5.** *Soit $f$, $g$ et $D(s, f, g)$ comme avant et $c$ la conjugaison complexe, alors on a*

$$(4\pi)^{-s/2} \Gamma(s/2) D(s, f, g) = \left\langle f^c, g E^*_{k-l/2}(z, s+2-2k; \xi\psi\chi_{-N}) y^{(s/2)+1-k} \right\rangle_N,$$

$$= (-i)^k \left\langle f^c|_k \tau_N, g|_{l/2} \tau_N \left( E^*_{k-l/2}(z, s+2-2k; \xi\psi\chi_{-N}) y^{(s/2)+1-k} \right) |_{k-l/2} \tau_N \right\rangle_N.$$

Il faut noter qu'on a mis dans la définition de $D(s, f, g)$ $a(n, f)$ et pas $\overline{a(n, f)}$, qui explique $f^c = \overline{f(-\overline{z})}$ dans le lemme. La deuxième égalité est du à

$$\langle f|_k \tau_N, h|_k \tau_N \rangle = \langle f, h \rangle, \ (g|_{l/2} \tau_N)(E_{k-l/2})|_{k-l/2} \tau_N = i^k (g E_{k-l/2})|_k \tau_N.$$

On termine avec le lemme suivant

**Lemme 3.3.6.** *Soit $g \in \mathcal{G}_{l/2}(\Gamma_1(N); \mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_1(N); \mathbb{C})$ alors*

$$H(g \partial^r_{k/2} h) = (-1)^r H(h \partial^r_{l/2} g).$$

*Soit $g \in \mathcal{G}_{l/2}(\Gamma_1(N); \overline{\mathbb{Q}})$ et $h \in \mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_1(N); \overline{\mathbb{Q}})$ alors*

$$e H(g \partial^r_{k/2} h) = e(g d^r h).$$

*Démonstration.* Pour $r = 0$ il est claire. Soit $f$ une forme modulaire de poids $2r + (l+k)/2$ et soient $\psi, \phi$ tels que $\partial_{i+j} \phi\psi$ ait le même poids que $f$. Il est facile à voir que $\partial_{i+j} \phi\psi = \psi \partial_i \phi + \phi \partial_j \psi$ et donc pour 3.3.4

$$\langle f, \psi \partial_i \phi \rangle = - \langle f, \phi \partial_j \psi \rangle.$$

Soit $\phi = \partial^{r-n}_{l/2} g$ et $\psi = \partial^{n-1}_{k/2} h$, alors on a

$$\left\langle f, \partial^{r-n}_{l/2} g \partial^n_{k/2} h \right\rangle = - \left\langle f, \partial^{r-n+1}_{l/2} g \partial^{n-1}_{k/2} h \right\rangle.$$

Par récurrence on $n$, on a

$$\left\langle f, g\partial_{k/2}^r h\right\rangle = (-1)^r \left\langle f, \partial_{l/2}^r gh\right\rangle$$

et on conclue par 3.3.4 et le fait que le produit scalaire de Petersson est non-dégénéré. Pour la deuxième partie, par [Hid88b, 6.6], on a que $H(g\partial_{k/2}^r h) = gd^r h + d\sum_{n=0}^{r-1} d^n g_{n+1}$, qui suffit puisque $e \circ d = 0$. □

## 3.4 Mesures arithmétiques et mesures généralisées

Soit $T$ un espace topologique avec une partie finie et une partie isomorphe à $\mathbb{Z}_p^r$ comme dans 2.1, on défini

**Définition 3.4.1.** *Une mesure arithmétique est une fonction $\mathcal{O}_K$-linéaire $\mu$ de $C(T;\mathcal{O}_K)$ vers $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(J);\mathcal{O}_K)$ tel que*

**A1** *Il existe un entier impair $k$ tel que*

$$\int_T \phi \mathrm{d}\mu \in \mathcal{G}_{k/2}(\Gamma_1(Jp^\infty);\overline{\mathbb{Q}})$$

*pour toute $\phi$ dans $LC(T;\mathcal{O}_K)$.*

**A2** *Ils existent un caractère $\varphi : \mathbb{Z}_J \to \mathcal{O}_K^\times$ et une action continue $Z_J \times T \to T$ tel que*

$$\mu(\phi)|z = z_p^{(k-1)/2}\varphi(z)\mu(\phi|z) \text{ pour toute } \phi \in C(T;\mathcal{O}_K),$$

*où $\phi|z(t) = \phi(zt)$ pour $z$ dans $Z_J$ et $t$ dans $T$.*

**A3** *Il existe une fonction continue $\nu : T \to \mathbb{Z}_p$ tel que, pour $z$ dans $Z_J$ on a*

$$\nu|z(t) = z_p^2\nu(t) \text{ et } d(\mu(\phi)) = \mu(\nu\phi)$$

*pour $d$ l'opérateur différentiel et $\phi$ dans $C(T;\mathcal{O}_K)$.*

*On dit que $k/2$ est le poids de $\mu$.*
*Si $\mathbf{1}_p\mu = \mu$ (i.e. $a(n,\mu(\phi)) = 0$ pour tout $\phi$ si $p$ divise $n$), alors $\mu$ est super-singulière.*
*Si $\mu$ a valeurs dans $\mathcal{P}_{k/2}(\Gamma_1(Jp^\infty))$, alors $\mu$ est cuspidale.*

On a le lemme suivant [Hid90, Lemma 4.1].

**Lemme 3.4.2.** *Si $\mu$ est une mesure arithmétique super-singulier, alors $\mu$ est cuspidale.*

On donne quelques exemples de mesure arithmétique ; soit $\zeta_{\chi_n}^b$ la mesure défini dans 2.3.3, on définit la mesure $E$ sur $Z_L$ dans $\mathcal{O}_K$

$$\int_{Z_L} \phi \mathrm{d}E = \sum_{\substack{n=1,\\(n,p)=1}} q^n \sum_{\substack{u^2t^2|n,\\(ut,Lp)=1,\\u>0,t>0}} \mu(u)\chi_n(u)t\int_{Z_L} \phi|(ut^2)\mathrm{d}\zeta_{\chi_n}^b.$$

Soit $\xi$ un caractère modulo $Lp^r$ tel que $\xi(-1)=(-1)^{(k-1)/2}$ et $\phi=\xi z_p^{(k-3)/2}$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{Z_L}\phi|(ut^2)\mathrm{d}\zeta^b_{\chi_n} &= \xi(ut^2)(ut^2)^{(k-3)/2}\int_{Z_L}\xi(z)z_p^{(k-3)/2}\mathrm{d}\zeta^b_{\chi_n}\\ &= \xi(ut^2)(ut^2)^{(k-3)/2}(1-\xi_1(b)b^{(k-1)/2})L((3-k)/2,\xi\chi_n)\end{aligned}$$

Puisque $\chi_n$ corresponde a le symbol d'Artin, on a que si $n$ est positif, alors $\chi_n(-1)=1$ et si $n$ est négatif $\chi_n(-1)=-1$ ; en confrontant 3.2.5, on a donc

$$\int_{Z_L}\xi z_p^{k-3/2}\mathrm{d}E=\begin{cases}(1-\xi_1(b)b^{(k-1)/2})E_{k/2}(\xi)|\mathbf{1}_p & \text{si } \xi(-1)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{3.4.3}$$

On voit donc que pour tout $\phi$ continue et localement constante, on a

$$\int_{Z_L}\phi(z)z_p^n\mathrm{d}E\in\mathcal{G}_{n+3/2}(\Gamma_1(Lp^\infty);\mathcal{O}_K)$$

puisque $\phi$ est combinaison linéaire de caractères. Puisque $LC(Z_L;\mathcal{O}_K)$ est dense dans $C(Z_L;\mathcal{O}_K)$, par continuité elle a valeurs dans $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_0(J);\mathcal{O}_K)$. On a les propriétés suivantes pour toute $\phi$

- $E(\phi)|z=zE(\phi|z)$
- $E(\phi)|\mathbf{1}_p=E(\phi)$

On définit alors la mesure $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_L$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times Z_L}w^m\eta(w)z_p^n\xi(z)\mathrm{d}\mathcal{E}=d^m\left(\left(\int_{Z_L}\xi(z)z_p^n\mathrm{d}E\right)|\eta\right).$$

On peut voir donc que $\mathcal{E}$ est une mesure arithmétique super-singulier, avec l'action de $Z_L$ sur $\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_L$ donnée par

$$z(w,z')=(z_p^2w,zz'),$$

caractère $\phi$ trivial et $\nu(w,z)=w$. Pour donner un autre exemple, soit $V$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $l$ impaire et $\nu$ une forme quadratique définie positive. Soit $S$ la forme bilinéaire associé. Fixons un réseau $L$ dans $V$ tel que $\mathbb{Z}\supset\nu(L)$ et soit $L^*$ le réseau dual. Posons $\Delta=[L^*:L]$, qui diffère par un carré du $\det A$, si $A$ est la matrice associé à $S$. Soit

$$\mathcal{W}=\{x\in L^*:\nu(x)\in\mathbb{Z}\}$$

et $M$ le plus petit entier tel que $\mathbb{Z}\supset M\nu(L^*)$, il est facile à voir que $4|M$. Pour tout $\phi:\mathcal{W}/Lp^r\to\overline{\mathbb{Q}}$, on a que (cfr. théorème 3.3.1 pour $A$ la matrice associé à $\nu$, $N=1$)

$$\theta(\phi)=\frac{1}{2}\sum_{w\in\mathcal{W}}\phi(w)q^{\nu(w)}\in\mathcal{G}_{l/2}(\Gamma_1(M);\overline{\mathbb{Q}}).$$

Posons $W=\varprojlim\mathcal{W}/Lp^r$ ; on peut prolonger naturellement $\nu$ sur $W$ et elle a valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. On définit l'action de $Z_M$ sur $W$ par la multiplication de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{W}$ et soit

$$W^\times=\{x\in W:\nu(x)\in\mathbb{Z}_p\}.$$

On prolonge $\theta$ sur $C(W;\mathcal{O}_K)$ et par continuité elle a valeurs dans $\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(M))$. Sa restriction à $W^\times$ est, par le théorème 3.3.1, une mesure arithemtique supersingulier de poids $l/2$, caractère $\varphi(d) = \left(\frac{(-1)^{(l-1)/2}2\Delta}{d}\right)$ et $\nu = \nu$.
Si on a une fonction $\eta$ spherical sur $V$ de poids $\alpha$, elle induit par continuité une fonction sur $W$ et on a que $\eta \cdot \theta : \phi \mapsto \theta(\eta\phi)$ est arithmétique et super-singulier de poids $l/2 + \alpha$ et même caractère que $\theta$.

On va maintenant définir les mesures $p$-adiques généralisées et les mesures de convolution, qu'on utilisera dans le paragraphe suivant pour construire la fonction $L$ $p$-adique en deux variable qui nous intéresse. Soit $\mathcal{I}$ comme dans 1.6.

**Définition 3.4.4.** *Soit $Meas(T;\mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I}$ la complété pro-fini de $\mathcal{I}$-module $Meas(T;\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I}$. Un élément de $Meas(T;\mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I}$ est dit une mesure généralisée sur $T\times\mathcal{X}(\mathcal{I};\mathcal{O}_K)$.*

Si $\mathcal{I} = \Lambda_K$, alors $Meas(T;\mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I}$ s'identifie avec $Meas(T\times\Gamma;\mathcal{O}_K)$. On peut donner à $\mathcal{I}$ une structure d'$\mathcal{O}_K$-algèbre de Banach avec la norme $N_{\mathcal{K}/\mathcal{L}_K}$. Puisque $\mathcal{I}$ est libre sur $\Lambda_K$ de rang $d$, on a toujours un isomorphisme d'espaces topologiques linéaires

$$Meas(T;\mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I} \cong Meas(T\times\Gamma;\mathcal{O}_K)^d.$$

Si $P$ est dans $\mathcal{X}(\mathcal{I};\mathcal{O}_K)$, alors pour le morphisme $\lambda_P : \mathcal{I}\to\mathcal{O}_K$, on a

$$Id\otimes\lambda_P : Meas(T;\mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I} \to Meas(T;\mathcal{O}_K)$$

puisque $Meas(T;\mathcal{O}_K)\cong Meas(T;\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I}/P\mathcal{I}$. On denote par $\Phi_P$ l'image de $\Phi$ par cette morphisme. On a le lemme suivant [Hid88b, Lemma 3.3]

**Lemme 3.4.5.** *Si $\mathcal{X}$ est dense dans $\mathcal{X}(\mathcal{I})$, alors toute les mesures $\Phi$ dans $Meas(T;\mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{I}$ sont determinées par leurs images $\Phi_P$, pour $P$ dans $\mathcal{X}$.*

Avant d'introduire les mesures de convolution, on donne un résultat d'algèbre commutative qu'on utilisera en suite [Hid88b, Proposition 7.1]

**Proposition 3.4.6.** *Soit $\mathcal{A}$ une $\Lambda_K$ algèbre fini et plat, $M$ un $\mathcal{A}$-module compact et $M^* = Hom_{\mathcal{O}_K}(M,\mathcal{O}_K)$. S'il existe un système projectif de $\mathcal{A}$-modules tel que*

**i)** *$M\cong\varprojlim M_i$ comme $\mathcal{A}$-module ;*

**ii)** *Les flèches de transiction $\rho_{i,j}$ sont surjectives ;*

**iii)** *$M_i$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre et fini pour tout $i$*

*Alors*

**i)** *$M\cong\varprojlim_m((\varinjlim M_i)\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_K/p^m\mathcal{O}_K)$ comme $\mathcal{A}$-module ;*

**ii)** *$(M^*)^*\cong M$ comme $\mathcal{A}$-module*

**iii)** *L'accouplement*

$$\langle,\rangle : M\times M^*\to\mathcal{A}^*$$

*qui à $m$, $m^*$ associe la fonction $\langle m,m^*\rangle(a) = m*(a\cdot m)$ est parfait.*

L'exemple qu'il faut rappeler est l'algèbre de Hecke ordinaire.
Soit $J$ premier avec $p$ et $L$ un multiple de $J$. Posons $\mathcal{A}_J$ et $\mathcal{A}_L$ les algèbres de groupes $\mathcal{O}_K[[Z_J]]$ et $\mathcal{O}_K[[Z_L]]$ ; soient $M$ un $\mathcal{A}_J$-module compact et $U$ et $V$ deux $\mathcal{A}_L$-modules compacts. Dans la suite, on aura toujours $M = Meas(T; \mathcal{O}_K)$. On choisit un caractère $\alpha$ de $Z_L$ dans $\mathcal{O}_K^\times$ et on définit l'action tordue par $\alpha$ de $Z_L$ sur $C(Z_L; \mathcal{O}_K)$ par $(\phi|_\alpha z)(z') = \alpha(z)\phi(z'z)$.
Soient $E : C(Z_L; \mathcal{O}_K) \to U^*$ et $\varphi : M^* \to V^*$ deux morphismes de $\mathcal{A}_L$-modules pour l'action tordue par $\alpha$. On suppose qu'il existe

$$\mathbf{m} : U^* \otimes V^* \to \overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(Lp); \mathcal{O}_K)$$

tel que

$$\mathbf{m}(u \otimes v)|a = \mathbf{m}(u|a \otimes v|a).$$

On peut penser à le formes modulaires de poids demi-entier avec les deux action $|z$ et $||z$ de 3.2.
Soit $M^* \widetilde{\otimes} U^*$ la complété $p$-adique de $M^* \otimes U^*$, on peut la identifier avec l'espace $\mathrm{Hom}_c(M, U^*)$ des morphismes $\mathcal{O}_K$-linéaires et continue en mettant sur $M$ la topologie pro-fini et sur $U^*$ la topologie $p$-adique [Hid88b, Lemma 8.1]. On définit l'action de $Z_L$ sur $C(M \times Z_L; \mathcal{O}_K)$ par

$$F|z(m, x) = F(z^{-1}m, zx) \text{ pour } F \in C(M \times Z_L; \mathcal{O}_K).$$

On définit donc la fonction $E_*(F) : M \mapsto U^*$ pour $F$ dans $C(M \times Z_L; \mathcal{O}_K)$ par

$$E_*(F)(m) = \int_{Z_L} (F|z)(m, 1)\mathrm{d}E(z).$$

On peut voir [Hid88b, après Lemma 8.1] que $E_*(F)$ est une fonction continue de $M$ vers $U^*$. Puisque toute $F$ dans $M^* \widehat{\otimes} C(Z_L; \mathcal{O}_K)$ peuvent être pensées comme fonctions sur $M \times Z_L$, on peut définir

$$E_* : M^* \widehat{\otimes} C(Z_L; \mathcal{O}_K) \to M^* \widetilde{\otimes} U^*.$$

On regarde maintenant $\varphi$. On la prolonge sur $M^* \otimes U^*$ vers $V^* \otimes U^*$ par l'identité et on pose

$$\widetilde{\varphi} : M^* \widetilde{\otimes} U^* \to \overline{\mathcal{S}}(\Gamma_1(Lp); \mathcal{O}_K) \text{ par } \mathbf{m} \circ \varphi \otimes Id.$$

On peut donc définir la mesure de convolution $E * \varphi = \widetilde{\varphi} \circ E_*$ qui nous donne un morphisme de $\mathcal{A}_L$-module si on défini naturellement l'action tordue par $\alpha$ de $Z_L$ sur $C(M \times Z_L; \mathcal{O}_K)$ par

$$\phi||_\alpha z(m, x) = \alpha(z)(m, xz).$$

Soit comme toujours $\mathcal{I}$ la clôture intégrale d'une composante irréductible de $\hbar^{ord}(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K)$, $\lambda$ la projection sur $\mathcal{I}$ primitive et $\psi$ le caractère associé. On introduit l'opérateur de trace tordu $T_{L/N}$, pour $L$ prime à $p$ et $N$ qui divise $L$. On a

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(N, L/N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a \equiv d \equiv 1 \bmod N, L/N, c \equiv 0 \bmod N b \equiv 0 \bmod L/N \right\} \\
&= \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} \Gamma_1(L) \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et on définit $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(L);\mathcal{O}_K)[\psi]$ comme la sous-algèbre de $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(L);\mathcal{O}_K)$ des éléments $f$ tel que $f|\zeta = \psi(\zeta)f$ pour $\zeta$ dans $(\mathbb{Z}/NpZ)^\times$. On définit donc $T_{L/N}$ comme la composition de

$$[N/L] : \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(L);\mathcal{O}_K)[\psi] \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N,L/N);\mathcal{O}_K)[\psi]$$

et de l'opérateur de trace

$$\mathrm{Tr} : \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N,L/N);\mathcal{O}_K)[Tr] \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)[\psi].$$

Cette construction est compatible avec l'idempotent $e$.
Posons $\breve{\alpha}$ la restriction de $\alpha$ à $(\mathbb{Z}/Lp\mathbb{Z})^\times$, on peut donc définir

$$\Psi : M^*\widehat{\otimes}C(\Gamma;\mathcal{O}_K) \cong M^*\widehat{\otimes}C(Z_L;\mathcal{O}_K)[\breve{\alpha}\psi] \to \overline{\mathcal{S}}^{ord}(\Gamma_1(N);\mathcal{O}_K)[\psi]$$

$$\Psi = e \circ T_{L/N} \circ E * \varphi.$$

On peut donc définir la mesure généralisée $E *_\lambda \varphi = l_\lambda \circ (\Psi \otimes Id)$ :

$$(M\widehat{\otimes}\mathcal{I})^* \cong M^*\widehat{\otimes}C(\Gamma;\mathcal{O}_K) \otimes_{\Lambda_K} \widehat{\mathcal{I}} \to \mathcal{O}_K,$$

pour $l_\lambda$ comme dans 1.6. Pour tout $\mathcal{O}_K$-point arithmétique $P$ de $\mathcal{I}$, on peut évaluer $E *_\lambda \varphi$ dans $P$ et on a pour $\phi$ dans $M^*$

$$(E *_\lambda \varphi)_P(\phi) = H(P) l_P \circ T_{L/N} \circ e(\widetilde{\varphi}(m \mapsto E_*(z \mapsto \alpha^{-1}\varepsilon_P \psi \omega^{-k(P)}(z) z_p^k \phi(z^{-1}m)))). \tag{3.4.7}$$

## 3.5 Deux théorèmes

Soit comme toujours $\mathcal{I}$ la clôture intégrale d'une composante irréductible de $\hbar^{ord}(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K)$, $\lambda$ la projection sur $\mathcal{I}$ et $\mathbf{C}(\lambda)$ le module de congruences associé. On suppose $\lambda$ primitif.
Maintenant on utilise la définition alternative de $|_k\gamma$, pour $\gamma$ dans $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Q})$

$$f|_k\gamma = \det(\gamma)^{k/2} j(\gamma,z)^{-k} f(\gamma(z)),$$

pour $k$ entier ou demi-entier et $j(\gamma,z)$ choisi de conséquence (avec ou sans le caractère).
Soit $\mu : C(T;\mathcal{O}_K) \to \overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(J);\mathcal{O}_K)$ une mesure arithmétique et super-singulier de poids $l/2$ et caractère $\varphi$ et $L$ le plus petit commun multiple de $J$ et $N$.

**Théorème 3.5.1.** *Soit $b \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $0 \neq H \in \mathcal{I}$ un éléments qui annule $\mathbf{C}(\lambda)$. Alors il existe une unique mesure généralisée $\Phi \in Meas(T;\mathcal{O}_K)\widehat{\otimes}\mathcal{I}$ tel que pour tout $(P,m)$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \times \mathbb{Z}$ avec*

$$0 \leq 2m < k(P) - \frac{l+1}{2} \;\; et \; H(P) \neq 0$$

*et pour tout $\phi \in LC(T;\mathcal{O}_K)$ tel que il existe un caractère d'ordre fini $\xi$ de $Z_J$ vers $\mathcal{O}_K^\times$ pour lequel $\phi(zt) = \xi(z)\phi(t)$ on a*

$$(1 - \psi_P(\xi_1\varphi_1)^{-1}(b) b^{k(P)-\frac{l+1}{2}-2m})^{-1} S(P) H(P)^{-1} \int_T \phi \nu^m \mathrm{d}\Phi_P =$$

$$= c(l,m,P)W'(f_P)^{-1}G(\psi_P)^{-1}a(p,f_P)^{-\beta}p^{\beta(\frac{4m+l}{4})}\frac{D(l+2m,f_P,\mu(\phi)|\tau_{Jp^\beta})}{(2\pi i)^{2m-1+\frac{l-1}{2}}\Omega(P)}$$

*pour $\Omega(P)$ et $S(P)$ comme pour le théorème 3.0.1, $\beta$ le plus petit entier tel que $\mu(\phi)\in\mathcal{G}_{l/2}(\Gamma_0(Jp^\beta),\xi\varphi)$ et*

$$c(l,m,P)=J^{m+\frac{l}{4}}N^{-\frac{k(P)}{2}}\Gamma(m+1)\frac{\Gamma(m+(l/2))}{\sqrt{2\pi}}i^{\frac{l-1}{2}}$$

*Démonstration.* On veut utiliser la mesure $E*\varphi$ définie précédemment ; soient $M^*=C(T;\mathcal{O}_K)$, $U^*=\overline{\mathcal{G}}(\Gamma_1(L);\mathcal{O}_K)$ et $V^*=\overline{\mathcal{P}}(\Gamma_1(L);\mathcal{O}_K)$. $Z_L$ agit sur $M^*$ par

$$\phi||z(t)=z_p^{l+1/2}\phi''(z)\phi(z_jt)$$

pour $z_j$ la projection de $z$ sur $Z_J$ et $\phi''(m)=\varphi(m)\left(\frac{-L/J}{m}\right)$. Soit $\mu^L=[L/J]\circ\mu$ une mesure a valeurs dans $\overline{\mathcal{P}}(L;\mathcal{O}_K)$. On a compatibilité avec l'action 3.2.3 $\mu^L(\phi)||z=\mu^L(\phi||z)$, puisque on a ajouté $\phi$ et $\chi_{-1}$ qui viennent de **A2** et $\chi_{L/J}$ qui provient de $[L/J]$. On pose que l'action de $Z_L$ sur $C(Z_L;\mathcal{O}_K)$ est tordue par l'identité, i.e. $\phi||z(z')=z\phi(zz')$ pour le caractère $\alpha=Id$. On prend $E$ la mesure d'Eisenstein de 3.4 et $\mu^L$ pour le morphisme de $M^*$ vers $V^*$ et soit $\Phi=L^{-1}E*_\lambda\mu^L$. On fix $k$ et $r$ pour $k(P)$ et $r(P)$.
Il faut donc évaluer $H(P)^{-1}\int_T\phi\nu^m\mathrm{d}\Phi_P$ qui par 3.4.7 est donc (attention qu'on a changé l'action sur $C(T;\mathcal{O}_K)$)

$$l_P\circ T_{L/N}\circ e\int_T\int_{Z_L}\varepsilon_P\psi\omega^{-k}(z)z_p^{k-1}(\phi\nu^m)||z^{-1}\mathrm{d}E\mathrm{d}\mu^L=$$

$$=l_P\circ T_{L/N}\circ e\int_T\phi\nu^m\mathrm{d}\mu^L\int_{Z_L}\eta(z)z_p^{(2k-j-3)/2}\mathrm{d}E$$

pour $j=l+4m$ et $\eta=\varepsilon_P\psi\chi_{-L/J}(\varphi\xi\omega^k)^{-1}$. Par la dérivation des fonctions composées et **A3** on a

$$d(\mu^L(\phi))=(L/J)\mu^L(\nu\phi).$$

En plus, puisque $\mu$ est super-singulier, on a $\mu(\phi)|\mathbf{1}_P=\mu(\phi)$ et par les formules

$$e(fdh)=-e(hdf),\ e(h(f|\mathbf{1}_P))=e(f(h|\mathbf{1}_P))$$

on a donc que la formule devient

$$(-J/L)^m l_P\circ T_{L/N}\circ e\left(\mu^L(\phi)d^m\int_{Z_L}\eta(z)z_p^{(2k-j-3)/2}\mathrm{d}E\right).\tag{3.5.2}$$

On utilise 3.4.3, la deuxième partie de 3.3.6 et la définition de $E_{(2k-j)/2}(\eta)$ et on a

$$(1-\eta_1(b)b^{(2k-j-1)/2})(-J/L)^m l_P\circ T_{L/N}\circ eH\left(\mu^L(\phi)\partial^m_{(2k-j)/2}E_{(2k-j)/2}(\eta)\right)$$

Par 1.6.9, si on pose $g=H\left(\mu^L(\phi)\partial^m_{(2k-j)/2}E_{(2k-j)/2}(\eta)\right)$ et si son niveau est $Lp^\beta$ on a donc

$$H(P)^{-1}(1-\eta_1(b)b^{(2k-j-1)/2})^{-1}L\int_T\phi\nu^m\mathrm{d}\Phi_P=$$

$$= a(p, f_P)^{r-\beta} p^{(\beta-r)(k-1)} \frac{\left\langle h_P|[p^{\beta-r}], g|T_{L/N}\right\rangle_{Np^\beta}}{\langle h_P, f_P\rangle_{Np^\beta}},$$

où $h_P = f_P^c|_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np^r & 0 \end{pmatrix}$, avec $c$ la conjugaison complexe. Mais on a

$$\begin{aligned}\left\langle h_P|[p^{\beta-r}], g|T_{L/N}\right\rangle_{Np^\beta} =& (L/N)^k \left\langle h_P|[Lp^{\beta-r}/N], g\right\rangle_{Lp^\beta} \\ =& (L/N)^k (Lp^{\beta-r}/N)^{-k/2} \left\langle f_P^c|\tau_{Lp^\beta}, g\right\rangle_{Lp^\beta} \\ =& (L/N)^{k/2} p^{-k(\beta-r)/2} \left\langle f_P^c|\tau_{Lp^\beta}, \mu^L(\phi)\partial^m_{(2k-j)/2} E_{(2k-j)/2}(\eta)\right\rangle_{Lp^\beta}.\end{aligned}$$

Par la formule suivante

$$\mu^L(\phi) = (L/J)^{l/4}((\mu(\phi|\tau_{Jp^\beta}))|\tau_{Lp^\beta}),$$

la définition de $E_{(2k-l)/2}(z, 2k-2-2m-l; \eta)$ et le lemme 3.3.5 on a donc, si $0 \leq 2m < k - (l+1)/2$

$$\left\langle f_P^c|\tau_{Lp^\beta}, \mu^L(\phi)\partial^m_{(2k-j/2)} E_{(2k-j)/2}(\eta)\right\rangle_{Lp^\beta} =$$

$$= D(l+2m, f, \mu(\phi)|\tau_{Jp^\beta}) i^k \Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{2m+l}{2}\right) 2^{-\frac{j}{2}-k} \pi^{-\frac{j}{2}-1} (Lp^\beta)^{\frac{j}{4}-\frac{k}{2}+1} \left(\frac{L}{J}\right)^{-\frac{l}{4}}.$$

Pour terminer, il faut evaluer $\langle h_P, f_P\rangle$. Si $f_P$ est primitive et $\psi_P$ est non trivial, on a alors on a $h_P = (-1)^k W(f) f_P$ et donc

$$\langle h_P, f_P\rangle = (-1)^k W(f) \langle f_P, f_P\rangle.$$

Sinon, on a $f_P(z) = f_P^\circ(z) - \frac{\psi'\psi_P(p)p^{k(P)-1}}{a(p,f_P)} f_P^\circ(pz)$ et avec le même calcul de [PR88, Lemma 27] on obtient

$$\frac{\langle h_P, f_p\rangle_{Np^\beta}}{\langle f_P^\circ, f_P^\circ\rangle_N} = (-1)^k W(f_P) p^{(2-k)/2} a(p, f_P) \left(1 - \frac{\psi'\psi_P(p)p^{k-1}}{a(p,f_P)^2}\right)\left(1 - \frac{\psi'\psi_P(p)p^{k-2}}{a(p,f_P)^2}\right)$$

et on conclut avec les formules pour $W(f_P)$. $\square$

**Corollaire 3.5.3.** *Soit $\theta$ la mesure arithmétique et super-singulière définie dans 3.4 et $\eta$ une fonction spherique d'ordre $\alpha$. Si*

$$0 \leq 2m < k(P) - \frac{l+1}{2} - \alpha \text{ et } H(P) \neq 0$$

*on a alors*

$$(1 - \psi_P(\xi_1\varphi_1)^{-1}(b) b^{k(P)-\alpha-\frac{l+1}{2}-2m})^{-1} S(P) H(P)^{-1} \int_{W^\times} \eta\phi\nu^m \mathrm{d}\Phi_P =$$

$$= c(l+2\alpha, m, P) W'(f_P)^{-1} G(\psi_P)^{-1} a(p, f_P)^{-\beta} p^{\beta(\frac{4m+l+2\alpha}{4})} \frac{D(l+\alpha+2m, f_P, \theta(\phi\eta)|\tau_{Mp^\beta})}{(2\pi i)^{2m-1+\alpha+\frac{l-1}{2}} \Omega(P)}$$

On définit maintenant

$$\mathcal{L}(s,f,\chi) = \prod_l (D_l(\chi(l)l^{-s})),$$

la fonction $L$ imprimitive associé à le changement de base. On peut l'écrire comme le produit de Rankin de $f$ et de la série théta $\theta(\chi) = \frac{1}{2}\sum_{n\in Z}\chi(x)n^\alpha q^{n^2}$ où $\alpha$ est dans $\{0,1\}$, tel que $\chi(-1) = (-1)^\alpha$. Enfait on a [Stu80, Chapter II]

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 \overline{f^c}\theta(\chi)\mathrm{d}x\right) y^{s/2-1}\mathrm{d}y = (4\pi)^{-s/2}\Gamma(s/2)\sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)a(n,f)^2}{n^{2s/2-\alpha}}$$

et par les formules de la proposition 1.2.8 on a, pour $\chi$ pair

$$\mathcal{L}(s,f,\chi) = L(2s-2k-2,\chi^2\psi^2)\sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)a(n,f)^2}{n^{2s/2}}.$$

On veut donc spécialiser le corollaire 3.5.3 dans le cas $l=1$ pour avoir interpolation $p$-adique pour $\mathcal{L}(s,f,\chi)$.

Soit $A_z(X) = (1+X)^{\log(\langle z\rangle)/\log(u)}$, on peut donc démontrer

**Théorème 3.5.4.** *Dans la notation du théorème 3.5.1, soit $\xi$ un caractère de Dirichlet modulo $Jp$ de conducteur divisible par $J$ tel que $\xi(-1)=1$. Soit $D$ comme ci-dessous*

- *$D = (X-Y)(A_2(X)\langle 2\rangle - A_2(Y))$ si $\psi_1 = \xi_1\omega$ et $\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(2) = \pm 1$ et $N$ impaire,*
- *$D = (A_2(X)\langle 2\rangle - A_2(Y))$ si $\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(2) = \pm 1$ et $N$ impaire mais $\psi_1 \neq \xi_1\omega$,*
- *$D = X-Y$ si $\psi_1 = \xi_1\omega$ mais si $\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(2) \neq \pm 1$ ou $N$ paire,*
- *$D = 1$ sinon.*

*Alors il existe $\mathcal{L}$ dans le corps des fractions de $\Lambda\otimes\mathcal{I}$ tel que, pour tout $H$ qui annulent $\mathbf{C}(\lambda)$, $DH\mathcal{L}\in\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$ et pour $(P_{n,\varepsilon},P)$ dans $\mathcal{A}(\Lambda)\times\mathcal{A}(\mathcal{I})$ tel que $n\neq k(P)-1$ ou $\psi^2(2)\neq\xi^2\omega^4(2)$, on a*

$$\mathcal{L}(P_{n,\varepsilon},P) = c(P_{n,\varepsilon},P)S(P)^{-1}E(n,\psi'\psi_P\varepsilon^{-1}\xi^{-1}\omega^{n-1})\frac{\mathcal{L}(n,f_P^\circ,\psi'\psi_P\varepsilon^{-1}\xi^{-1}\omega^{n-1})}{\Omega(P)(2\pi i)^{n-2}},$$

*où on pose $C(\varepsilon\xi\omega^{-n+1}) = Jp^\delta$,*

$$c(P_{n,\varepsilon},P) = (n-1)!C(\varepsilon\xi\omega^{-n+1})^{n-1}G(\varepsilon\xi\omega^{-n+1})N^{\frac{-k(P)}{2}}W'(f_P)^{-1}G(\psi_P)^{-1}\psi'(p)^\delta$$

*et $S(P)$ et $E(n,\eta)$ comme dans le théorème 3.0.1.*

*Démonstration.* On pose $\nu$ la forme quadratique $x^2$ sur $\mathbb{Q}$ et on choisit $J\mathbb{Z}$ comme réseau, dans la notation de 3.4 on a donc $M=4J^2$ et $W^\times = Z_J$ et $T=\Gamma$. Soit $\eta$ un caractère de Dirichlet modulo $Jp^{\delta'}$ de conducteur $Cp^{\delta''}$. On pose

$$\theta_J(\eta) = \int_{W^\times}\eta(w)w_p^\alpha\mathrm{d}\theta \text{ tel que } \eta(-1) = (-1)^\alpha, \alpha = 0,1,$$

$$\theta_C(\eta) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\eta_0(n)n^\alpha q^{n^2}$$

pour $\eta_0$ le caractère primitif associé à $\eta$. On a la formule suivante

$$\theta_J(\eta) = \sum_{t|(Jp/C)} \mu(t)\eta_0(t)t^\alpha \theta_C(\eta)|[t^2].$$

Si, comme dans les hypothèses du théorème, $C = J$, alors on a par le corollaire 3.3.2

$$\theta_J(\eta)|\tau_{C^2p^{2\delta'}} =$$

$$-\eta_0(Jp)^{\frac{-1}{2}}(-i)^\alpha G(\eta)\left(\theta_C(\eta^{-1}) - p^{1+\alpha}\eta_0^{-1}(p)\theta_C(\eta^{-1})|[p^2]\right) \text{ si } \delta = 0 \text{ et } \delta' = 1 \tag{3.5.5}$$

$$(-1)^\alpha (Jp^\delta)^{-1/2} G(\eta)\theta_C(\eta^{-1}) \text{ si } \delta = \delta' > 0. \tag{3.5.6}$$

On prend $\xi$ comme dans les hypothèses et $\Phi$ comme dans 3.5.3. On veut calculer

$$\int_{W^\times} \varepsilon\xi\omega^{-n} w^{\alpha+2m} \mathrm{d}\Phi_P,$$

pour $0 \leq n < k(P) - 1$, $n \equiv \alpha \bmod 2$, $n = \alpha + 2m$, avec $0 \leq 2m < k(P) - \alpha - 1$. Explicitement, il faut évaluer

$$D\left(1 + \alpha + n, f_P, \left(\int_{W^\times} \varepsilon(\langle w\rangle)\langle w\rangle^n \xi(w)\mathrm{d}\theta_J\right)|_{\alpha+1/2}\tau_{4J^2p^{2\delta'}}\right).$$

Par 3.5.5 et 3.5.6 appliquée à $\eta = \varepsilon\xi\omega^{-n}$ on a, si $p$ ne divise pas $C(\varepsilon\xi\omega^{-n})$,

$$(Jp)^{\frac{-1}{2}}(-i)^\alpha G(\varepsilon\xi\omega^{-n})\left(p^{-n}a(p, f_P)^2 - \varepsilon\xi\omega^{-n}(p)\right) \times$$

$$\times(1 - (\psi_P\psi'\varepsilon\xi\omega^n)(2)^2 2^{2k-4-2n})\mathcal{L}(n+1, f_P, \psi'\psi_P\varepsilon\xi\omega^{n-1}).$$

Si $p$ divise le conducteur, $p^\delta||C(\varepsilon\xi\omega^{-n})$, on a alors

$$(Jp^\delta)^{\frac{-1}{2}}(-i)^\alpha G(\varepsilon\xi\omega^{-n})\times$$

$$\times(1 - (\psi_P\psi'\varepsilon\xi\omega^n)(2)^2 2^{2k-4-2n})\mathcal{L}(n+1, f_P, \psi'\psi_P\varepsilon\xi\omega^{n-1}).$$

Pour tout $\phi$ dans $C(\Gamma; \mathcal{O}_K)$, on choisit $\Psi$ dans $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$ tel que

$$\int_\Gamma \phi(w)\mathrm{d}\Psi_P = \frac{1}{2}\int_W^\times \xi(w)\phi(\langle w\rangle)\langle w\rangle^{-1}\mathrm{d}\Phi_P.$$

On choisit $b$ tel que $\langle b\rangle = u$ engendre $\Gamma$ et on pose

$$\begin{aligned}
H_1 &= 1 - \psi_1\xi_1^{-1}\omega^{-1}(b)(1+Y)(1+X)^{-1}\\
H_2 &= 1 - \left(\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(2)\right)^2(\langle 2\rangle)^{-2}A_2(Y)^2A_2(X)^{-2}\\
\mathcal{L} &= (H_1H_2H)^{-1}\Psi.
\end{aligned}$$

Puisque $(1+X)(P_{n,\varepsilon}) = \varepsilon(u)u^n$ et $A_l(X)(P_{n,\varepsilon}) = \varepsilon(\langle l\rangle)\langle l\rangle^n$, on a que $\mathcal{L}$ satisfait les hypothèse du théorème par le corollaire 3.5.3 et puisque $H_1$ n'est pas une unité si et seulement si $\psi_1\xi_1^{-1}\omega^{-1}(b)$ est 1, qui est équivalent à $\psi_1 = \xi_1\omega$ puisque

$\langle b \rangle$ engendre $\Gamma$ et $H_2$ n'est pas une unité si et seulement si $(\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(2))^2 = 1$. Dans ce cas, on a $H_2 = (\langle 2 \rangle A_2(X))^{-2}(A_2(X)\langle 2 \rangle - A_2(Y))(A_2(X)\langle 2 \rangle + A_2(Y))$ et seulement $A_2(X)\langle 2 \rangle - A_2(Y)$ n'est pas une unité.
Il faut noter que le facteur $E_1(Q,P)$ interpole le facteur extra qu'on a par l'action de $\tau_{4J^2p^{2\delta'}}$ sur la série théta et $E_2(Q,P)$ interpole les facteurs de différence en $p$ entre $\mathcal{L}(s, f_P^\circ, \eta)$ et $\mathcal{L}(s, f_P, \eta)$ ; enfaite si $f_P$ n'est pas primitive, alors $\psi_P = 1$ et le polynôme de $f_P$ est $X^2 - \lambda_P(T_p)X$, mais le polynôme de $f_P^\circ$ est

$$X^2 - a(p, f_P^\circ)X + \psi'(p)p^{k(P)-1},$$

et on sait que $\lambda_P(T_p)$ est la racine de ce polynôme qui est une unité (cfr. la construction après 1.4.3) et donc l'autre racine est $\psi'(p)p^{k(P)-1}/\lambda_P(T_p)$. $\square$

Dans le cas $\psi_1 \neq \xi_1\omega$ on a que $\mathcal{L}$ n'a pas des pôles en $X - Y$. On peut améliorer cela avec

**Proposition 3.5.7.** *On a que $\mathcal{L}$ est finie en $X - Y$ au moins que $\psi'\xi'^{-1}$ est quadratique imaginaire et $\lambda$ a multiplication complexe par le corps correspondent à $\psi'\xi'^{-1}$.*

*Démonstration.* On veut démontrer que pour tout $P$ dans $\mathcal{A}(\Lambda)$ on a que $\mathcal{L}(P,P)$ est nul. Il faut donc évaluer $\int_T \phi\nu^m \mathrm{d}\Phi_P$ pour $n = k(P) - 1$, $\varepsilon = \varepsilon_P$, $2m = k - 1 - \alpha$. On évalue donc 3.5.2 dans ces valeurs, pour la mesure $\theta_J$ introduite avant et $\eta = \chi_{-L}\psi\xi\omega^{-1}$ qui est $\chi_{-L}\psi'\xi'$ pour l'hypothèse $\psi_1 = \xi_1\omega$. On a

$$l_P \circ T_{L/N} \circ e\left(\theta^L d^m \int_{Z_L} \psi'\xi'\chi_{-L}(z)z_p^{-1}\mathrm{d}E\right).$$

Par 3.4.3 et le théorème 2.3.2 on a que

$$\int_{Z_L} \psi'\xi'\chi_{-L}(z)z_p^{-1}\mathrm{d}E = 0$$

si $\chi_{-L}\psi'\xi' \neq \chi_n$ pour un certain $n$ qui divise $L$ ($\omega$ est impair, donc $\xi'\psi'(-1) = \psi(-1) = 1$ et $\chi_{-L}(-1) = -1$). Soit alors $L = x^2M$ pour $M$ sans facteurs carrés, puisque $a(n, \theta^L(\phi)) = 0$ si $n$ n'est pas de la forme $m^2L/(4J^2)$. On a alors que

$$a\left(n, \theta^L d^m \int_{Z_L} \psi'\xi'\chi_{-L}(z)z_P^{-1}\mathrm{d}E\right) \neq 0$$

implique que $n/t$ est une norme dans $F = \mathbb{Q}(\sqrt{M/t})$, mais puisque $\lambda$ n'a pas multiplication complexe, alors il existe $l$ qui reste prime dans $F$ et tel que $l_P \circ T_l = al_P$ pour $a \neq 0$, mais puisque $l$ n'est pas une norme dans $F$, alors $T_l$ annulent $\left(n, \theta^L d^m \int_{Z_L} \psi'\xi'\chi_{-L}(z)z_P^{-1}\mathrm{d}E\right)$ et alors $l_P$ aussi annule l'intégral. $\square$

## 3.6 La preuve

On a défini dans 3.1 les ensembles $\Sigma_i$ et $\Xi$ pour une représentation automorphe $\pi$. Maintenant, pour la représentation $\pi(P)$ associée à $f_P$, on veut considérer les ensembles $\Sigma_i(P)$ et $\Xi(P)$. On peut démontrer que ces ensembles dépendent seulement de $\lambda$ et ils sont donc indépendants de $P$ [Hid90, §6] et donc on n'écrira pas le point $P$ dans la notation. On introduit donc les facteurs suivants

$$\begin{aligned}
E_0 &= \prod_{l\in\Sigma_0}(1+\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(l)\,\langle l\rangle^{-1}\,A_l(Y)/A_l(X)),\\
E_1 &= \prod_{l\in\Sigma_1\cup\Sigma_3\cup\Xi}(1-\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(l)\,\langle l\rangle^{-1}\,A_l(Y)/A_l(X)),\\
E_2 &= \prod_{l\in\Sigma_2\cup\Sigma_3}(1+\psi\xi^{-1}\omega^{-2}(l)\,\langle l\rangle^{-1}\,A_l(Y)/A_l(X)),\\
E_\Xi &= \prod_{l\in\Xi}(1-\psi^2\xi^{-1}\omega^{-3}(l)\langle l\rangle^{-2}A_l(Y)^2/(\lambda(T_l)^2A_l(X)))\\
E &= E_0E_1E_2E_\Xi.
\end{aligned}$$

Il est facile à voir par la proposition 3.1.1 que $E$ est tel que

$$L(n,f_P,\psi'\psi_P\varepsilon^{-1}\xi^{-1}\omega^{n-1}) = E(P_{n,\varepsilon},P)^{-1}\mathcal{L}(n,f_P^\circ,\psi'\psi_P\varepsilon^{-1}\xi^{-1}\omega^{n-1}),$$

si $E(P_{n,\varepsilon},P)$ est non-nul et si $1\le n<k(P)$ (qui implique $E(P_{n,\varepsilon},P)$ presque toujours non-null). En fait, dans la notation de la proposition 3.1.1, on a $\alpha = \xi\omega\psi^{-1}$. Le seul facteur qui a besoin de précision à faire est $E_\Xi$ ; en fait, il faut noter que $a(l,f_P^\circ)\overline{a(l,f_P^\circ)} = l^{(k(P)-1)/2}$. On définit donc les facteurs pour la fonction $L(1-s,\pi(P)\otimes\alpha^{-1})$ puisque on aura besoin d'utiliser l'équation fonctionnelle ensuite.

$$\begin{aligned}
E_0' &= \prod_{l\in\Sigma_0}(1+\psi^{-1}\xi\omega(l)A_l(X)/A_l(Y)),\\
E_1' &= \prod_{l\in\Sigma_1\cup\Sigma_3\cup\Xi}(1-\psi^{-1}\xi\omega(l)A_l(X)/A_l(Y)),\\
E_2' &= \prod_{l\in\Sigma_2\cup\Sigma_3}(1+\psi^{-1}\xi\omega(l)A_l(X)/A_l(Y)),\\
E_\Xi' &= \prod_{l\in\Xi}(1-\xi(l)\langle l\rangle^{-1}A_l(X)/\lambda(T_l)^2),\\
E' &= E_0'E_1'E_2'E_\Xi'.
\end{aligned}$$

On définit donc un élément $L = E^{-1}\mathcal{L}$ dans le corps des fractions de $\Lambda\otimes\mathcal{I}$ et on pose, pour $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, $E_P(Q) = E(Q,P)$, $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}(Q,P)$, $L_P = \mathcal{L}_PE_P^{-1}$. Par la formule dans le théorème 3.5.4, on a donc trouver une mesure généralisée qui interpole, a mois des facteurs en $p$, la partie algébrique de $L(n,f_P^\circ,\psi'\psi_P\varepsilon^{-1}\xi^{-1}\omega^{n-1})$. Posons donc $C = C(\xi)$ et $C' = C(\psi'^{-1}\xi)$ et on définit $U$, qui est une unité dans $\Lambda\otimes\mathcal{I}$, par

$$U(X,Y) = \frac{\psi_1^{-1}\xi_1\varepsilon(C')G(\psi'^{-1}\xi)\,\langle CC'\rangle\,A_{C'}(X)}{\xi_1(C)G(\xi')A_C(X)A_{C'}(Y)}.$$

Si $\psi_P$ est trivial, alors $\psi'^{-1} = \varepsilon_P\omega^{-k(P)}$ et on a

$$U(P_{n,\varepsilon},P) = \frac{\psi_1^{-1}\xi_1\varepsilon(C)G(\psi'^{-1}\xi)\langle C'\rangle^{n-k+1}}{\xi_1\varepsilon(C)G(\xi')\langle C\rangle^{n-1}}.$$

Si on pose comme dans [Sch88, Corollary 2.6]

$$I(m, f_P^\circ, \eta) = \left(\frac{G(\eta^{-1})}{(2\pi i)^m}\right)^{1+\alpha} \frac{L(m+k-1, f_P^\circ, \eta)}{\pi^{k-1}\langle f_P^\circ, f_P^\circ\rangle},$$

pour $\alpha = 0, 1$ tel que $\eta(-1) = (-1)^{m+\alpha}$ et $2 - k(P) \leq m \leq 0$ si $\alpha = 0$ et $1 \leq m \leq k-1$ si $\alpha = 1$. Si $\psi_P$ est trivial, alors on a pour $\eta = \psi'\xi^{-1}\omega^{n-1}\varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned} U(P_{n,\varepsilon}, P)L_P(P_{n,\varepsilon}) =& (-1)^{k-1}2^{2k(P)-2}N^{-k(P)/2}W'(f_P)^{-1}S(P)^{-1}\Gamma(n)\times \\ &\times C(\psi'\xi'^{-1})^{n-k+1}E(P_{n,\varepsilon}, P)I(n-k+1, f_P^\circ, \eta). \end{aligned}$$

Toujours dans le cas $\psi_P$ trivial, on a donc

$$U(P_{n,\varepsilon}, P)L_P(P_{n,\varepsilon}) = (-1)^{k-1}2^{2k(P)-2}N^{-k(P)/2}W'(f_P)^{-1}S(P)^{-1}\mu(\varepsilon\omega^{1-n}\xi x^{n-k+1}), \tag{3.6.1}$$

pour $\mu$ la mesure définie dans [Sch88, Theorem 5.3] avec $\lambda = \psi'^{-1}\xi$ et $f = f_P^\circ$. Ainsi Schmidt met des hypothèse sur $p$ (qu'il n'existent pas de $l$ tel que $0 < |1 - \psi'(l)^2 l^{2k-2} a(l, f_P)^{-4}|_p < 1$), $\mu$ est définie dans le corps des fractions des mesures $p$-adiques sur $\mathbb{Z}_p^\times$ et cette formule est vraie pour presque tout $P_{n,\varepsilon}$.
Si on pose, dans le cas $\psi_P$ triviale, pour $\eta = \psi'\xi^{-1}\omega^{n-1}\varepsilon^{-1}$

$$\widetilde{I}(m, f_P^\circ, \eta) = \Gamma(k+m-1)C(\eta)^{m+(m-1)\delta}I(m, f_P^\circ, \eta), \tag{3.6.2}$$

$$C(\widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1}) = \varepsilon(0, \widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1})\left(\frac{G(\psi'^{-1}\xi')}{\sqrt{\psi'^{-1}\xi'(-1)C(\psi'^{-1}\xi')}}\right)^3,$$

$$M(\psi'\xi'^{-1}) = C(\psi'\xi'^{-1})^{-3}C(\widehat{\pi}(P)).$$

On peut donc déduire de l'équation fonctionnelle de $L(s, f_P^\circ, \eta)$ la formule d'inversion suivant [Sch88, Proposition 2.7]

$$\widetilde{I}(m, f_P^\circ, \eta) = C(\widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1})M(\psi'\xi'^{-1})^{-m}\psi'^{-1}\eta(M(\psi'\xi'^{-1}))2\Gamma(1-m)\widetilde{I}(1-m, f_P^\circ, \eta^{-1}). \tag{3.6.3}$$

En substituant 3.6.3 et 3.6.2 dans 3.6.1, on a donc

$$\begin{aligned} U(P_{n,\varepsilon}, P)L_P(P_{n,\varepsilon}) =& W'(f_P)^{-1}S(P)^{-1}2^{2k(P)-1}N^{-k(P)/2}C(\widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1})\times \\ &\times E(n, \eta)M(\psi'\xi'^{-1})^{-1+k-n}\psi'^{-1}\eta(M(\psi'\xi'^{-1}))\times \\ &\times \Gamma(k-n)\widetilde{I}(k-n, f_P^\circ, \eta^{-1}). \end{aligned}$$

On a que le deux deuxièmes lignes dépend $p$-adic méromorphiquement de $P_{n,\varepsilon}$ et $2NC(\widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1})$ n'est pas divisible par $p$ ($\psi_P$ est trivial). On peut donc trouver une unité $V(X, Y)$ dans $\mathbb{Z}_p[[X, Y]]$ tel que

$$\begin{aligned} V(P_{n,\varepsilon}, P) =& 2^{2k(P)-1}N^{-k(P)/2}C(\widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1})\times \\ &\times M(\psi'\xi'^{-1})^{-1+k-n}\psi'^{-1}\eta(M(\psi'\xi'^{-1})) \\ =& 2^{-1}\xi_1^{-1}(M(\psi'\xi'^{-1}))C(\widehat{\pi}(P) \otimes \psi'\xi'^{-1})M(\psi'\xi'^{-1})^{-2}\times \\ &\left\{4N^{1/2}M(\psi'\xi'^{-1})\right\}^{k(P)}\left\langle M(\psi'\xi'^{-1})\right\rangle^{1-n}\varepsilon^{-1}(M(\psi'\xi'^{-1})). \end{aligned}$$

Essentiellement,

$$V(X,Y) = cost \times A_{4N^{1/2}M(\psi'\xi'^{-1})}(Y)A_{M(\psi'\xi'^{-1})}(X)^{-1}.$$

On définit donc $L' = V^{-1}UL$ et on a donc

$$L'(P_{n,\varepsilon}, P) = W'(f_P)^{-1}S(P)^{-1}E(P_{n,\varepsilon}, P)\Gamma(k-n)\widetilde{I}(k-n, f_P^{\circ}, \eta^{-1}).$$

Si on pose $L'_P(Q) = L'(Q,P)$, alors par [Sch88, Theorem 4.1] il exist une constante $C_{P,n}$ qui dépende de $P$ et de poids de $Q$ (Schmidt l'appelle $\gamma_n$) tel que, si $\psi'\xi^{-1}$ n'est pas quadratique imaginaire avec $\psi'\xi^{-1}(-1) = -1$ ou $\xi_1\omega \neq \psi_1$ alors

$$C_{P,n}E'_P L'_P \in \mathcal{O}_K[[X]],$$

ou sinon

$$(1-(1+Y)/(1+X))C_{P,n}E'_P L'_P \in \mathcal{O}_K[[X]],$$

où le facteur $(1-(1+Y)/(1+X))$ donne par évaluation dans $(P_{n,\varepsilon}, P)$

$$1 - u^{k-n}\varepsilon^{-1}\varepsilon_P(u)$$

qui doit donner un facteur comme dans [Sch88, Theorem 5.3], mais $\varepsilon_P = \psi_1^{-1}\omega^k$, $\psi_1 = \xi_1\omega$ et $\omega(u) = 1$ on a alors

$$1 - u^{k-n}\varepsilon^{-1}\xi_1^{-1}(u).$$

On appelle le premier cas Cas I et le deuxième Cas II. On note que

$$(1-(1+Y)/(1+X)) = (X-Y)/(1+X).$$

Les facteurs premiers de $E_i$ pour $i = 0,1,2$ sont $(1+X) - z(1+Y)$ pour $z \in u^{-1}\mu_{p^\infty}$. En fait, pour $s$ tel que $\langle l \rangle = u^s$ on a pour $E_0$

$$A_l(X) - \psi\xi\omega^{-2}u^{-s}A_l(Y) = \prod_{i=1}^{s}\left((1+X) - \zeta_i u^{-1}(1+Y)\right),$$

pour $\zeta_i$ racine $s$-ième de l'unité ($s$ est dans $p\mathbb{Z}_p$). Pour $i = 1,2$ on peut voir cela dans la même façon. Et dans la même façon on voit aussi que les facteurs de $E'_i$ pour $i = 0,1,2$ sont $(1+X) - z(1+Y)$ pour $z \in \mu_{p^\infty}$.
Pour $E_\Xi$ les facteurs premiers sont $1+X-z\lambda(T_l)^{-2/s}(1+Y)^2$ où $z$ dans $u^{-2}\mu_{p^\infty}$ et pour $E'_\Xi$ ils sont dans $\Lambda$

**Lemme 3.6.4.** *Il existe $H' \in \mathcal{I}$ tel que pour le Cas I (resp. Cas II)*

$$H'E'L' \in \Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$$
$$(H'E'L' \in (X-Y)\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}).$$

*Démonstration.* On prouve seulement cela dans le Cas I, puisque pour le Cas II la preuve est la même. On écrit l'idéal fractionnaire $(E'L')$ comme $N/D_0D_1$, avec $D_0$ et $D_1$ deux diviseur de $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$ tel que $D_0$ est un idéal dans $\mathcal{I}$ et $D_1$ n'a pas les facteurs de $D_0$. Par la définition de $E'$, on a que un facteur premier de $D_1$ est $1+X-\alpha(Y)$ pour $\alpha$ dans $\mathcal{I}$, donc clairement l'image de $D_1(P)$ dans $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}/P$ est première avec $p$ pour presque tout $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$. On veut démontrer que $N(P)$ et $D_1(P)$ sont alors premiers entre eux pour presque tout $p$. Sinon, le radical de $D_1 + N$ contient tout le $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ et contient donc $\Lambda \otimes \mathfrak{m}_{\mathcal{I}}$, pour $\mathfrak{m}_{\mathcal{I}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{I}$. Donc $(D_1 + P)/(\Lambda \otimes P)$ contient une puissance de $p$ et par ce qu'on a dit avant, il contient aussi un élément premier avec $p$ et donc tout les idéaux premiers qui le contient on hauteur 2, contradiction. Mais si $N(P)$ et $D_1(P)$ sont premiers entre eux pour presque tout $P$, alors il n'existe pas $C_{P,n}$ tel que $E'_P L'_P$ soit dans $\mathcal{O}_K[[X]]$. On a donc $D_1$ trivial et on peut choisir $H' = H$ comme dans le théorème 3.5.4. □

On a donc $HL' = V^{-1}UHL$ et dans le Cas I on obtient qu'il est dans

$$E'^{-1}\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I} \text{ et } E^{-1}D^{-1}\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I},$$

et dans la Cas II dans

$$(X-Y)^{-1}E'^{-1}\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I} \text{ et } E^{-1}D^{-1}\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}.$$

Si on démontre que $E'$ et $ED$ n'ont pas des facteurs communs, on a que $HL$ est dans $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$ (resp. $(X-Y)^{-1}\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$). On démontre donc

**Lemme 3.6.5.** *$(A_2(X) - \langle 2 \rangle^{-1} A_2(Y))E$ et $(X-Y)E'_0E'_1E'_2$ sont premiers entre eux et $(A_2(X) - \langle 2 \rangle^{-1} A_2(Y))E_0E_1E_2$ et $E'$ sont premiers entre eux.*

*Démonstration.* On commence en supposant que $E_\Xi$ a un facteur $\omega_K \in \mathcal{O}_K$. Ce veut dire qu'il existe $l \in \Sigma$ tel que

$$A_l(X) \equiv \psi^2\xi^{-1}\omega^{-3}(l)\langle l \rangle^{-2} A_l(Y)^2/\lambda(T_p)^2 \bmod \omega_K.$$

Puisque le membre à gauche est une série formelle en $X$ et à droite en $Y$, il faut que $A_l(X) \equiv c \bmod \omega_K$, qu'il est impossible puisque $\binom{s}{n}$ sont une base pour les fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$.
Dans la preuve du théorème 5.1 dans [Sch88], Schmidt démontre que pour tout $P$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ tel que $\psi_P$ est trivial et $f_P$ n'est pas primitive, alors $DE_0E_1E_2(P)$ et $E'_0E'_1E'_2(P)$ sont premiers entre eux.
Suppose que $P = (1+X) - \alpha(Y)$ divise $E_\Xi$, on veut prouver qu'il ne divise pas $(X-Y)E'_0E'_1E'_2$ ; sinon, on a $\alpha(Y) = z(1+Y)$ pour $z$ dans $u^{-1}\mu_{p^\infty}$. Il exist donc $l$ dans $\Xi$ tel que, pour $s$ tel que $\langle l \rangle = u^s$, on a

$$z^s(1+Y)^s = \alpha(Y)^s = \zeta \langle l \rangle A_l(Y)\lambda(T_l)^{-2},$$

donc $\lambda(T_l)^2 = z^{-s}\zeta \langle l \rangle (1+Y)^s$ et par évaluation dans $P$, en prenant le valeur absolue complexe on a $q^{k(P)-1} = q^{k(P)-2}$, contradiction. Dans la même façon on a la deuxième affirmation. □

On a donc le corollaire suivant [Hid90, Corollary 6.3]

**Corollaire 3.6.6.** *On a les propriétés suivantes*

- *$E'_\Xi$ et $E_\Xi$ n'ont pas des facteurs de la forme $(1+X) - z(1+Y)$ avec $z$ dans $u^{-1}\mu_{p^\infty}$ et $\mu_{p^\infty}$, respectivement.*
- *Les zéros dans $\mathcal{A}(\Lambda)$ de*

$$E_\Xi(X,P)E_0(X,P)E_1(X,P)E_2(X,P)(A_2(P) - \langle 2 \rangle^{-1} A_2(P))$$

*pour $k(P) \geq 2$ ne sont pas des entiers $\zeta u^n$, $n < k(P) - 1$.*

– *Si un facteur de $E_\Xi$ et $E'_\Xi$ n'est pas une unité pour un certain $l$, alors*

$$\psi^{-2}\xi\omega^3(l)\lambda(T_l)^2 \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_{\mathcal{I}}, \ \ et\ \xi(l)\lambda(T_l)^2 \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_{\mathcal{I}},$$

*respectivement.*

Pour cette lemme, il suffit d'étudier les diviseurs communs de $E_\Xi$ et $E'_\Xi$. Pour faire cela, on introduit un peu de notation : soit $\Xi = \{q_1, \ldots, q_r\}$ et soit $\psi_i$ la restriction de $\psi$ à $\mathbb{Z}_{q_i}$. Soit $2^\Xi$ l'ensemble des parties de $\Xi$. Pour $J$ dans $2^\Xi$, on définit $\psi_J = \prod_{i\in J}\psi_i$, $\lambda_J = \lambda \otimes \psi_J^1$ et $\xi_J = \xi\psi_J^{-2}$. On a que $\lambda$ et $\lambda_J$ ont le même conducteur et $\lambda_J$ est encore minimal [Hid90, page 139]. Posons $\mathcal{L}_J$ la fonction $L$ du théorème 3.5.4 pour $\lambda_J$ et $\xi_J$.
Si on définit $T = E_0E_1E_2$, on pose $L_J = T^{-1}H\mathcal{L}_J$, $f_P|J$ la forme modulaire en $P$ qui appartient à $\lambda_J$, $\Omega_J(P)$ la période de (la forme primitive associé à) $f_P|J$ et $c_J(P_{n,\varepsilon}, P)$ dans un façon cohérent avec cette notation et le théorème 3.5.4. Posons enfin

$$\begin{aligned}
D_J &= \prod_{i\in J}(1-\psi^2\xi^{-1}\omega^{-3}(q_i)\langle q_i\rangle^{-2}A_{q_i}(Y)^2/(\lambda(T_{q_i})^2A_{q_i}(X))),\\
D'_J &= \prod_{i\in J}(1-\xi^{-1}\omega^{-1}(q_i)\lambda(T_{q_i})^2/A_{q_i}(X)).
\end{aligned}$$

On a donc, en écrivant le conducteur de $\varepsilon\xi\omega^{-n+1}$ comme $Jp^\delta$

$$\begin{aligned}
\frac{D_J^{-1}L_\emptyset}{{D'_J}^{-1}L_J}(P_{n,\varepsilon}, P) =& \frac{\psi'\psi_J^{-2}(p)^\delta a(p, f_P|J)^{2\delta}c_\emptyset(P_{n,\varepsilon}, P)\Omega_J(P)}{\psi'(p)^\delta a(p, f_P|J)^{2\delta}c_J(P_{n,\varepsilon}, P)\Omega_\emptyset(P)}\\
=&\frac{G(\xi')W'(f_P|J)\Omega_J(P)}{G(\xi'\psi_J^{-2})W'(f_P)\Omega_\emptyset(P)}.
\end{aligned}$$

Pour justifier ces formules, on note que $D'_J(P_{n,\varepsilon}, P)$ coïncide avec les facteurs en $J$ de $L_\emptyset(P_{n,\varepsilon}, P)$ et $D_J$ coïncide avec les facteurs en $J$ de $L_J(P_{n,\varepsilon}, P)$. Tout les deux ont le même caractère $\psi\psi'\varepsilon^{-1}\xi^{-1}\omega^{n-1}$ (le caractère de $\lambda_J$ est $\psi$ tordu par $\psi_J^{-2}$, qui est compensé par $\xi_J$). Puisque $a(p, f_P) = \psi_J(p)a(p, f_P|J)$ (cfr. théorème 1.6.5) on a que les facteurs $E_2$ et $S$ ne changent, mais $E_1$ change et il donne la première partie de la fraction. La deuxième formule est obtenue en explicitant $c(P_{n,\varepsilon}, P)$ et par la formule sur les sommes da Gauss

$$G(\varepsilon\xi_J\omega^{1-n}) = G(\xi'\psi_J^{-2})G(\varepsilon\xi_1\omega^{1-n})\xi'\psi_J^{-2}(p^\delta)\varepsilon\xi_1\omega^{1-n}(J).$$

On a donc que cette fraction ne dépende pas de $X$ et il est un'unité dans $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{K}$. Pour $A$ et $B$ dans $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{I}$, on dit $A \approx B$ si $A/B$ est une unité dans $\Lambda\widehat{\otimes}\mathcal{K}$. On a donc en appliquant le relation précèdent, si $I$ et $J$ sont disjoints, $D_J^{-1}L_I \approx {D'_J}^{-1}L_{I\cup J}$. Par ce qu'on a dit avant les lemmes, un diviseur de $D_i$ est

$$(1+X) - u^{-2}\zeta(1+Y)^2/(\lambda_i(T_{q_i}))^{2/s}$$

et un diviseur de $D'_i$ est

$$(1+X) - \zeta(\lambda_i(T_{q_i}))^{2/s}.$$

Un facteur en commun doit être

$$(1+X) - \zeta u^{-1}(1+Y),$$

et soit $\mathbf{P}$ l'ensemble de ces facteurs pour tout $\zeta$ dans $\mu_{p^\infty}$ . Puisque $D_i^{-1}L_J \approx {D'_J}^{-1}L_{J\cup i}$, alors on a que les seuls pôles de $D_i^{-1}L_J$ sont dans $\mathbf{P}\cup(X-Y)$. En particulier, cela est vrai pour $D_{\{i,j\}}L_\emptyset$ puisque cela est vrai pour $D_iL_\emptyset$ et pour $D_iL_j$ et

$$D_{\{i,j\}}^{-1}L_\emptyset \approx {D_j}^{-1}D_i^{-1}L_\emptyset \approx {D'_j}^{-1}D_i^{-1}L_j.$$

Suppons par recurannce que $D_J^{-1}L_I$ a singularités seulement dans $\mathbf{P}$ (si on est dans le Cas I) ou dans $\mathbf{P}\cup(X-Y)$ (si on est dans le Cas II) pour tout $J$ de cardinalité plus petite que $n$ et $I$ disjoint de $J$, on va prouver que alors que $D_{J\cup i}^{-1}L_I$ a singularité dans $\mathbf{P}$ ou $\mathbf{P}\cup(X-Y)$. Mais on a

$$D_{J\cup i}^{-1}L_I \approx D_J^{-1}L_I \approx {D'_i}^{-1}D_J^{-1}L_{I\cup i},$$

et donc les pôles de $D_{J\cup i}^{-1}L_I$ sont dans l'ensemble des pôles de $D_J^{-1}L_{I\cup i}$ et $D_J^{-1}L_I$, qui par l'hypothèse de récurrence sont dans $\mathbf{P}$ ou $\mathbf{P}\cup(X-Y)$.
On a donc prouver que $HL = D_\Xi L_\emptyset$ peut avoir des pôles seulement dans $\mathbf{P}$ dans le Cas I, mais cela est impossible par la première proposition du corollaire 3.6.6. Dans la même façon on a que le seul pôle de $HL$ dans le Cas II peut être $X-Y$, mais par la proposition 3.5.7 on voit que cela est impossible.

# Annexe A

# Cohomologie

Ici, on veut surtout introduire la notation et les théorèmes qu'on utilise dans 2.4. La référence principale est [Hid93]. Soit $X$ une surface de Riemann compacte et connexe, $S$ un ensemble fini de points de $X$ et $Y = X \setminus S$. Soit $\Gamma$ le groupe fondamental de $Y$, $R$ un anneau et $M$ un module pour l'algèbre de groupe $R[\Gamma]$. On définit les groupes de cohomologie $H^i(\Gamma, M)$ comme $Ext^i(R, M)$ dans la catégorie de $R[\Gamma]$-modules. Si on pose

$$F_q = \bigotimes_R^q R[\Gamma],\ C^i(\Gamma, M) = \left\{f : \Gamma^i \to M\right\}$$

alors on a que $R_q$ constituent une résolution libre de $R$ comme $R[\Gamma]$-module et $C^i(\Gamma, M) \cong \mathrm{Hom}_{R[\Gamma]}(F_i, M)$. Soient $\partial^i : C^i \to C^{i+1}$ les flèches induites par les flèches de la résolution libre. On a $\partial^0(m)(\gamma) = (\gamma - 1)m$ et $\partial^1(u)(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 u(\gamma_2) - u(\gamma_1\gamma_2) + u(\gamma_1)$. Posons

$$Z^i(\Gamma, M) = \mathrm{Ker}(\partial^i) \quad B^i(\Gamma, M) = \mathrm{Im}(\partial^{i-1}).$$

On appelle les éléments de $Z^i(\Gamma, M)$ $i$-cocycles et de $B^i(\Gamma, M)$ $i$-cobords. On a donc

$$H^i(\Gamma, M) = Z^i(\Gamma, M)/B^i(\Gamma, M).$$

Un 1-cobord est donc une fonction $u : \Gamma \to M$ tel que $u(\gamma_1\gamma_2) = \gamma_1 u(\gamma_2) + u(\gamma_1)$ et un 1-cobord est une fonction $u : \Gamma \to M$ tel que $u(\gamma) = (\gamma - 1)x$ pour un $x$ dans $M$. Pour tout $s$ dans $S$, soit $\pi_s$ l'élément qui correspond à un tour anti-horaire autour de $s$, $\Gamma_s = \{\pi_s^m | m \in \mathbb{Z}\}$ et $P = \left\{\gamma^{-1}\pi_s\gamma | \gamma \in \Gamma,\ s \in S\right\}$. Définissons les 1-cocycles et 2-cobords paraboliques

$$\begin{aligned} Z^1_P(\Gamma, M) &= \left\{u \in Z^1(\Gamma, M) | u(\pi) \in (\pi - 1)M \text{ pour tout } \pi \in P\right\} \\ B^2_P(\Gamma, M) &= \left\{\partial u | u \in C^1(\Gamma, M) \text{ tel que } u(\pi) \in (\pi - 1)M \text{ pour tout } \pi \in P\right\}. \end{aligned}$$

Essentiellement, ils sont cocycles (ou cobords) si on se restreint à $P$. On définit donc

$$H^1_P(\Gamma, M) = Z^1_P(\Gamma, M)/B^1(\Gamma, M),\ H^1_P(\Gamma, M) = Z^2(\Gamma, M)/B^2_P(\Gamma, M)$$

et on a la suite exacte

$$0 \to H^1_P(\Gamma, M) \to H^1(\Gamma, M) \to \bigoplus_{s \in \Gamma \setminus P} H^1(\Gamma_s, M)$$

puisque si on a la condition de cocycle sur $\pi$, on l'a sur touts ses conjugués. On a une description plus géométrique de la cohomologie. Soit $Y_0$ la surface qu'on obtient en enlevant des petits disque qui ne se touchent pas, autour chaque $s$ dans $S$. Soit $H$ le revêtement universel de $Y$ et $H_0$ l'image inverse de $Y_0$. On choisit un complexe simplicial $K$ de $H_0$ tel que

1. Tout les éléments de $\Gamma$ induit une fonction de simplexes de $K$ dans lui-même.
2. Pour tout $s$ dans $S$, le bord des disques qu'ont à enlevé sont une 1-chaîne $t_s$.
3. Il existe un domaine fondamental $\Phi_0$ in $H_0$ dont la clôture a un nombre fini de simplexes.

Il suffit de trouver cela sur $Y_0$ et puis le bouger sur $H_0$ par $\Gamma$. On considérer donc les $R$-modules libres $A_i$ engendrés par les $i$-chaînes de $K$, qui forment un complexe par la projection $\partial$ sur le bord. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{R[\Gamma]}(-, M)$ à ce complexe et on considère ses groupes de cohomologie $H^i(K, M) = Z^i(K, M)/B^i(K, M)$. On définit

$$\begin{array}{rcl} Z_P^1(K, M) & = & \left\{u \in Z^1(K, M) | u(t_s) \in (\pi - 1)M \text{ pour tout } s \in S\right\} \\ B_P^2(K, M) & = & \left\{\partial u | u \in C^1(\Gamma, M) \text{ tel que } u(t_s) \in (\pi - 1)M \text{ pour tout } s \in S\right\}. \end{array}$$

On définit donc

$$H_P^1(K, M) = Z_P^1(K, M)/B^1(K, M),\ H_P^1(K, M) = Z^2(K, M)/B_P^2(K, M).$$

On a le théorème suivant, du à Shimura [Hid93, Appendix, Proposition 1].

**Proposition A.0.1.** *Pour $H$, $Y$, $K$ et $S$ comme avant on a des isomorphismes*

$$H_*^i(K, M) \cong H_*^i(\Gamma, M)$$

*où $*$ indique ou la cohomologie standard, ou la cohomologie parabolique.*

Soit $S_0$ un sous-ensemble de $S$, $T$ la réunion disjointe de $t_s$ dans $Y$, pour $s$ dans $S_0$ et $K_T$ le sous-complexe engendré par les translation de $T$ par $\Gamma$. Soit $A_i^T$ l'$R$-module libre engendré par les $i$-simplexe de $K^T = K/K_T$. On définit $H_{S_0}^i(\Gamma, M)$ comme l'$i$-ième groupe de cohomologie de $A_i^T$. Si $S_0 = S$, alors on pose $H_c^i(\Gamma, M) = H_{S_0}^i(\Gamma, M)$, la cohomologie à support compact.

**Proposition A.0.2.** *On a la suite exacte longe suivante*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H_{S_0}^0(\Gamma, M) & \to & H^0(\Gamma, M) & \to & \bigoplus_{s \in S_0} H^0(\Gamma_s, M) & \to \\ & \to & H_{S_0}^1(\Gamma, M) & \to & H^1(\Gamma, M) & \to & \bigoplus_{s \in S_0} H^1(\Gamma_s, M) & \to \\ & \to & H_{S_0}^2(\Gamma, M) & \to & H^2(\Gamma, M) & \to & 0. & \end{array}$$

On définit pour $M$ le faisceau de fonctions de $Y$ vers $M$ localement constantes qu'on appelle $\underline{M}$. Si on considère, pour un faisceau $F$ localement constant, qui a valeurs dans un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie, le faisceau $\mathcal{A}_F^r$ de $r$-formes différentielle $C^\infty$ a valeurs dans $F$, on peut définir la cohomologie de De Rham $H_{DR}^i(Y, F)$ comme la cohomologie du complexe

$$0 \to \mathcal{A}_F^1(Y) \to \mathcal{A}_F^2(Y) \to \mathcal{A}_F^3(Y) \to \cdots.$$

**Théorème A.0.3.** *On a* $H^i_{DR}(Y,F) \cong H^i(Y,F)$.

On peut aussi considérer la compactification de $Y_0$ dans $X$, qui est différente de $X$, puisque $X$ a des points au cusps, mais $Y^S$ a des petits cercles. On définit $Y^{S-S_0}$ comme $Y^S$ moins les cercles autour des points de $S_0$. Soient $H^i(Y^{S-S_0},\underline{M})$ les groupes de cohomologie correspondants au foncteur de sections globales et $H^i_c(Y^{S-S_0},\underline{M})$ au foncteur de sections globales à support compact. On a

**Proposition A.0.4.** *On a, pour touts* $S_0$ *dans* $S$*, des isomorphismes canonique*

$$H^i_c(Y^{S-S_0},\underline{M}) \cong H^i_{S_0}(\Gamma,M),\ H^i(Y,\underline{M}) \cong H^i(\Gamma,M).$$

**Corollaire A.0.5.** *On a une suite exacte longue*

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \to & H^0_c(Y^{S-S_0},\underline{M}) & \to & H^0(Y,\underline{M}) & \to & \bigoplus_{s\in S_0} H^0_{S_0}(\partial Y_s,\underline{M}) & \to \\ & \to & H^1_c(Y^{S-S_0},\underline{M}) & \to & H^1(Y,\underline{M}) & \to & \bigoplus_{s\in S_0} H^1(\partial Y_s,\underline{M}) & \to \\ & \to & H^2_c(Y^{S-S_0},\underline{M}) & \to & H^1(Y,\underline{M}) & \to & 0. & \end{array}$$

# Bibliographie


[Bou65] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7 : Diviseurs.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1314. Hermann, Paris, 1965.

[CS87] J. Coates and C.-G. Schmidt. Iwasawa theory for the symmetric square of an elliptic curve. *J. Reine Angew. Math.*, 375/376 :104–156, 1987.

[Del79] P. Deligne. Valeurs de fonctions l et périodes d'intégrales. *Automorphic forms, representations, and L-functions*, 33(part 2) :313–346, 1979.

[DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.

[GJ76] Stephen Gelbart and Hervé Jacquet. A relation between automorphic forms on GL(2) and GL(3). *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 73(10) :3348–3350, 1976.

[Gou88] Fernando Q. Gouvêa. *Arithmetic of p-adic modular forms*, volume 1304 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Hid81] Haruzo Hida. On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions. *Invent. Math.*, 64(2) :221–262, 1981.

[Hid85] Haruzo Hida. A $p$-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms. I. *Invent. Math.*, 79(1) :159–195, 1985.

[Hid86a] Haruzo Hida. Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms. *Invent. Math.*, 85(3) :545–613, 1986.

[Hid86b] Haruzo Hida. Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(2) :231–273, 1986.

[Hid88a] Haruzo Hida. Modules of congruence of Hecke algebras and $L$-functions associated with cusp forms. *Amer. J. Math.*, 110(2) :323–382, 1988.

[Hid88b] Haruzo Hida. A $p$-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms. II. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38(3) :1–83, 1988.

[Hid90] Haruzo Hida. $p$-adic $L$-functions for base change lifts of $\mathrm{GL}_2$ to $\mathrm{GL}_3$. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 93–142. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Hid93] Haruzo Hida. *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, volume 26 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Joc82] Naomi Jochnowitz. Congruences between systems of eigenvalues of modular forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 270(1) :269–285, 1982.

[Kat75] Nicholas M. Katz. Higher congruences between modular forms. *Ann. of Math. (2)*, 101 :332–367, 1975.

[Kat76] Nicholas M. Katz. $p$-adic interpolation of real analytic Eisenstein series. *Ann. of Math. (2)*, 104(3) :459–571, 1976.

[KM85] Nicholas M. Katz and Barry Mazur. *Arithmetic moduli of elliptic curves*, volume 108 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[Kob93] Neal Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, volume 97 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.

[Man73] Ju. I. Manin. Periods of cusp forms, and $p$-adic Hecke series. *Mat. Sb. (N.S.)*, 92(134) :378–401, 503, 1973.

[Man74] Ju. I. Manin. Values of $p$-adic Hecke series at lattice points of the critical strip. *Mat. Sb. (N.S.)*, 93(135) :621–626, 631, 1974.

[PR88] B. Perrin-Riou. Fonctions L p-adiques associées à une forme modulaire et à un corps quadratique imaginaire. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1) :1–32, 1988.

[PS79a] I. I. Piatetski-Shapiro. Classical and adelic automorphic forms. An introduction. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 185–188. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[PS79b] I. I. Piatetski-Shapiro. Multiplicity one theorems. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 209–212. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Sch88] C.-G. Schmidt. $p$-adic measures attached to automorphic representations of GL(3). *Invent. Math.*, 92(3) :597–631, 1988.

[Ser95] Jean-Pierre Serre. Classes des corps cyclotomiques (d'après K. Iwasawa). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 174, 83–93. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Shi73] Goro Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math. (2)*, 97 :440–481, 1973.

[Shi76] Goro Shimura. The special values of the zeta functions associated with cusp forms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(6) :783–804, 1976.

[Sil94] Joseph H. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, volume 151 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Sil09] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, second edition, 2009.

[Stu80] Jacob Sturm. Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight. *Amer. J. Math.*, 102(2) :219–240, 1980.

[Stu89] J. Sturm. Evaluation of the symmetric square at the near center point. *American Journal of Mathematics*, 111(4) :585–598, 1989.

[Wei40] André Weil. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Actual. Sci. Ind., no. 869. Hermann et Cie., Paris, 1940.