Théorie géométrique des invariants et majorations de hauteurs

Marco Maculan

Mémoire de M2 en Mathématiques, année 2008-2009
Université de Paris-Sud XI

Sous la direction de Jean-Benoît Bost
Université de Paris-Sud XI

Dédié à ma grand-mère

Remerciements

En premier lieu, je veux exprimer ma gratitude à mon directeur de mémoire Jean-Benoît Bost, qui m'a introduit à un aussi fascinant sujet comme la géométrie d'Arakelov. Je tiens à le remercier pour sa disponibilité à m'expliquer – et, la plus part des cas, réexpliquer – ce que je ne comprenais pas, pour sa patience avec mon français approximatif et pour avoir pu bénéficier de sa vaste culture mathématique.

Je souhaite aussi remercier les professeurs dont j'ai suivi les cours cette année : David Harari, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie, Jean-François Dat et Yves Laszlo. Chacun, avec son style différent d'enseignement, a contribué à m'inspirer pendant l'année et à m'encourager dans mon travail.

La possibilité de venir étudier à Paris m'a été donnée par le programme ALGANT. Mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont permis de profiter de cette experience : les professeurs et les tuteurs de Paris et Padova et toutes les personnes qui travaillent au niveau administratif pour faire marcher un projet de telle dimension.

Ma passion pour les mathématiques trouve sa racine dans les enseignants que j'ai trouvé dans ma carrière d'étudiant et qui ont été capables de me faire apprécier sa difficile beauté. J'ai eu la chance de rencontrer dans mes études des professeurs comme Maurizio Candilera et Maurizio Cailotto, dont les cours de géométrie linéaire et projective et le cours de courbes algébriques planes sont la raison pour laquelle j'étudie la géométrie algébrique. Je dois beaucoup surtout au deuxième, qui avec passion m'a conduit à découvrir la géométrie arithmétique à l'occasion de mon mémoire de licence.

Pouvoir étudier à l'université n'est pas une possibilité donnée à tout le monde. Je remercie mes parents et mon frère pour le soutien constant et l'aide avec laquelle ils m'ont accompagné pendant ce chemin. Je veux souligner, au-delà de l'appui économique, l'encouragement que j'ai reçu sur tout dans mes moments plus difficiles, même si j'ai eu très rarement l'occasion de pouvoir expliquer ce que j'était en train d'étudier.

Ce mémoire termine ma vie d'étudiant à l'université. Ces années n'auraient de loin pas été aussi significatives pour moi sans la présence des amis : les sorties, les moments d'étude, les vacances feront partie des ces splendides mémoires. Je veux remercier pour les moments partagés ensemble, sans aucun ordre d'importance et sans aucune tentative de précision, mes amis de Padova et de Malo, qui ont partagé avec moi la joie de vivre une année dans un bois à 40 minutes de la civilisation.

Enfin, je dédie ce mémoire à ma grand-mére Antonietta. Les dernières mots qu'elle m'a dit – "Ciapa qua sinque euro : va comprarte un pacheto de sigarete" – resteront le signe de son amour simple et rugueux, une caractéristique résérvée aux proches.

Table des matières

1 Géométrie **1**

1.1 Théorie Géométrique des Invariants 1

1.1.1 Définitions catégoriques 1

1.1.2 Définitions géométriques 3

1.1.3 Actions de groupes algébriques 6

1.1.4 Quotients affines 7

1.1.5 Linéarisation de faisceaux inversibles 8

1.1.6 Quotients projectifs 9

1.1.7 Un critère numérique de stabilité 9

1.1.8 Un exemple : les formes binaires 14

2 Arithmétique **15**

2.1 Géométrie d'Arakelov 15

2.1.1 Fibrés vectoriels hermitiens 15

2.1.2 Le degré arithmétique 18

2.2 Hauteurs 18

2.2.1 Hauteurs de Weil 18

2.2.2 Hauteurs sur une courbe lisse 21

2.2.3 Hauteurs sur une courbe arithmétique 22

3 Les minorations de hauteurs **25**

3.1 Rappels sur les schémas en groupes linéaires 25

3.2 Le cas géométrique 27

3.2.1 Le fibré vectoriel associé à une représentation 27

3.2.2 Polynômes invariants et sections non nulles 28

3.2.3 Le théorème dans le cas géométrique 30

3.3 Le cas arithmétique 33
3.3.1 Représentations compactifiées 33
3.3.2 Le théorème dans le cas arithmétique 34
3.3.3 Une réciproque dans le cas arithmétique 36

4 Une exemple **39**
4.1 L'inégalité de Liouville 39
4.1.1 Une preuve nouvelle 40

A Les critères valuatifs de séparation et propreté **43**
A.1 Lemmes préparatoires 43
A.2 Le critère valuatif de séparation 45
A.3 Le critère valuatif de propreté 46

Introduction

Dans ce mémoire, on présente une minoration de hauteurs pour les points semi-stables par rapport à des actions de groupes linéaires. Il s'agit d'un point de contact entre deux grandes théories de la géométrie algébrique d'aujourd'hui : la théorie géométrique des invariants et la géométrie arithmétique (dans ce cas, la géométrie d'Arakelov).

La première a été développée par Mumford au début des années soixante, en combinant des constructions algébriques et géométriques remontant aux mathématiciens du XIX-ème siècle avec les techniques les plus modernes de la géométrie algébrique à la Grothendieck. Elle a conduit à des progrès considérables dans l'étude des variétés projectives, notamment par la construction d'espaces de modules.

La deuxième a été introduite par Arakelov dans ses articles des années '74-'75 et ensuite développée par plusieurs auteurs. L'idée fondamentale est celle compléter l'analogie en géométrie arithmétique entre la "situation géométrique" (au-dessus d'un corps des fonctions d'une courbe projective lisse) et la "situation arithmétique" (au-dessus d'un corps de nombres) en prenant en compte les places archimédiennes des corps de nombres, en faisant intervenir des constructions de géométrie complexe hermitienne. Le concept d'hauteur – qui est centrale en plusieurs preuves de géométrie diophantienne (par exemple le théorème de Mordell-Weil et les théorèmes de Siegel en approximation diophatienne) – se place de façon naturelle, et en généralité suffisante pour les applications, en géométrie d'Arakelov.

La minoration qu'on présente dans ce mémoire poursuit cette philosophie. Soient $\pi : \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to \mathscr{C}$ un fibré en espaces projectifs sur une courbe projective lisse et $X \subset \mathbf{P}(\mathscr{E})$ une sous-variété de dimension d, plate sur $\mathscr{C}$. En étendant des travaux antérieurs de Mumford and Viehweg, Cornalba et Harris [CH88] ont prouvé que si le point de Hilbert de la fibre générique $X_\eta \subset \mathbf{P}(\mathscr{E}_\eta)$ est semi-stable, alors le nombre d'intersection $c_1(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1))^d \cdot [X]$ satisfait une minoration non triviale en terme du degré $\deg \mathscr{E}$ du fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{C}$ et du degré de la variété X_η. Bost dans [Bos94] travaille avec des cycles effectifs plutôt que des sous-variétés et il remplace le point de Hilbert par le point de Chow : de cette façon il peut utiliser systématiquement la théorie d'intersection. Il en résulte un approche plus direct à la minoration et, en utilisant a théorie d'intersection arithmétique, il est capable d'en prouver un analogue arithmétique. L'argument de Bost est divisé en deux pas : dans le premier il lie le nombre d'intersection ci-dessus du cycle à la hauteur de la forme de Chow et dans le deuxième, en utilisant l'hypothèse de semi-stabilité de la forme de Chow, il montre qu'elle a hauteur majorée. Gasbarri dans [Gas00], finalement, note que ce dernier argument depend seulement du fait que la forme de Chow est un point semi-stable pour une certaine action et le généralise à des représentations spéciales (homogène d'un certain degré).

Le mémoire est structuré de la façon suivante : dans les deux premiers chapitres on fait des rappels respectivement sur la théorie géométrique des invariants et sur les concepts de base de géométrie d'Arakelov et de théorie des hauteurs qu'on utilise dans la suite. Le troisième chapitre est dédié à la preuve des minorations : après des rappels sur les schémas en groupes linéaires, on introduit les représentations homogènes et on donne la démonstration de la minoration de hauteurs dans le cas géométrique. En suite, on apporte les modifications nécessaires – substantiellement les représentations compactifiées – pour adapter la preuve dans le cas arithmétique. Dans le cadre arithmétique, on preuve aussi une réciproque de la minoration. Dans le quatrième chapitre on donne un exemple, suggéré par Bost, d'application de ce résultat à la géométrie diophantienne : on va déduire, de la minoration dans sa version arithmétique, l'inégalité de Liouville pour les nombres algébriques. Enfin, en appendice, on prouve une version des critères valuatifs de séparation et propreté pour les schémas de type fini sur un corps, qui précise les versions disponibles dans la littérature.

Introduction

In this master thesis, we will introduce a lower bounds of heights of semi-stable points with respect to actions of linear groups. It is, actually, a first link between two relevant fields of nowadays algebraic geometry : namely, geometric invariant theory and arithmetic geometry (in this case, Arakelov geometry).

The first one has been developed by Mumford at the beginning of the sixties, combining constructions stemming back to mathematicians of XIX-th century with the most recent techniques in algebraic geometry "à la Grothendieck". It permitted notable progresses in the study of projective varieties, overall by constructing moduli spaces.

The second one has been introduced by Arakelov in his articles of '74-'75 and then developed by many authors. The fundamental idea is to stress the analogy in arithmetic geometry between the "geometric situation" (over a function field of a smooth projective curve) and the "arithmetic situation" (over a number field) by taking account of the archimedean places of number fields, and making construction of hermitien complex geometry. The concept of height – crucial in many proofs in diophantine geometry (e.g. the proof of Mordell's conjecture) – finds in Arakelov geometry its right framework, within the generality required by the applications.

The lower bound we shall introduce pursues this philosophy. Let $\pi : \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to \mathscr{C}$ be a projective bundle over a smooth projective curve and $X \subset \mathbf{P}(\mathscr{E})$ a subvariety of dimension d, flat over $\mathscr{C}$. Extending earlier work of Mumford and Viewheg, Cornalba and Harris [CH88] proved that if the Hilbert point of the generic fiber $X_\eta \subset \mathbf{P}(\mathscr{E}_\eta)$ is semistable, then the intersection number $c_1(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1))^d \cdot [X]$ satisfies a non-trivial lower bound in terms of the degree $\deg \mathscr{E}$ of the vector bundle $\mathscr{E}$ on $\mathscr{C}$ and of the degree of the subvariety X_η. Bost in [Bos94] works with effective cycles instead of subvarieties and he replaces the Hilbert point by the Chow point : in this way he can use systematically intersection theory. He earns from it a more direct approach to the lower bound and, using arithmetic intersection theory, he's able to prove an arithmetic analogue. Bost's argument is mainly divided in two steps : in the first part, he links the above intersection number to the height of the Chow form and in the second one, using the hypothesis of semistability of the Chow forms, he proves the lower bound of the height. Gasbarri in [Gas00] points out that this last argument only depends on the fact that the Chow form is semi-stable with respect to a certain action and he generalizes it to some special representations (i.e. homogeneous representations of some degree).

The thesis is structured as follows : in the first two chapters, we briefly recall some topics in geometric invariant theory and some basics concepts in Arakelov geometry and height theory. The third chapter is devoted to the proof of the lower bound : after recalling some facts on linear group schemes, we define homogeneous representations and we give the proof in the geometric case. Then, we introduce the needed modifications – substantially compactified representations – to adapt the proof in the arithmetic case. We also prove a converse for the lower bound in the arithmetic case. In the fourth chapter we give an example, suggested by Bost, of an application of this result to diophantine geomtry : we deduce, from the lower bound in the arithmetic case, Liouville's inequality for algebraic numbers.

Lastly, in appendix, we prove a version of the valuative criterions of separatedness and properness for schemes of finite type over a field, that specifies the versions availables in the literature.

Chapitre 1

Géométrie

1.1 Théorie Géométrique des Invariants

Dans cette section on fait un bref rappel sur la théorie géométrique des invariants. Le sujet étant classique, il est traité amplement dans la litterature. Cependant, on ne peut pas ne pas citer les œuvres vastes et approfondies de David Mumford : notamment [GIT], [MS72] et [Mum77]. On conseil aussi l'article de Seshadri [Ses77] pour la construction des quotients sur une base arbitraire et les livres (propédeutiques au livre de Mumford) de Dolgachev [Dol03] et Newstead [New78].

1.1.1 Définitions catégoriques

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie admettant des produits fibrés.

Définition 1.1.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et S un objet de $\mathscr{C}$. Un *S-objet en groupes* est la donnée de un S-objet $\pi : G \to S$ et d'une factorisation à travers le foncteur oublie $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ du foncteur point $\mathscr{C}/S \to \mathrm{Set}$, $T \mapsto G(T) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/S}(T, G)$ ($\mathscr{C}/S$ désigne la catégorie des S-objets), disons $G(-) = F \circ \varphi_G$, avec $\varphi_G : \mathscr{C}/S \to \mathrm{Grp}$. Dans la suite, avec un abuse de notation, on écrira $G(T)$ au place de $\varphi_G(T)$.

Soient G et H deux S-objets en groupes, alors un morphisme de S-objet en groupes est un morphisme de S-objet $f : G \to H$ tel que, pour tout S-objet T, $f(T) : G(T) \to H(T)$ soit un morphisme de groupes (plus précisément la transformation naturelle $f(-)$ induite entre les foncteurs points doit se factoriser à travers une transformation naturelle $\eta : \varphi_G \to \varphi_H$).

Si G est un S-objet en groupes, par le lemme de Yoneda, il existe des S-morphismes $\mu : G \times_S G \to G$, $\mathrm{inv} : G \to G$ et $e : S \to G$ qui satisfont aux propriétés suivantes :

– *Associativité* : le diagramme suivante commute

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_G"'] & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_S G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

– *Identité* : les flèches composées

$$G \xrightarrow{\sim} S \times_S G \xrightarrow{e \times \mathrm{id}_G} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$$
$$G \xrightarrow{\sim} G \times_S S \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times e} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$$

sont toutes deux égales à id_G.

– *Inverse* : les flèches composées $G \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \underset{\mathrm{inv} \times \mathrm{id}_G}{\overset{\mathrm{id}_G \times \mathrm{inv}}{\rightrightarrows}} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$ sont toutes deux égales à $e \circ \pi$ (Δ est la diagonale).

Définition 1.1.2. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, S un objet de $\mathscr{C}$. On dit que un S-objet en groupes G agit sur un S-objet X si pour tout S-objet T, $G(T)$ agit sur $X(T)$ de façon fonctorielle.

Encore par le lemme de Yoneda, on voit qu'il existe un morphisme $\sigma : G \times_S X \to X$ tel que :

– le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S X \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \sigma"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_G"'] & G \times_S X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

– la flèche composée $X \xrightarrow{\sim} S \times_S X \xrightarrow{e \times \mathrm{id}_X} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$ est égale à id_X.

Définition 1.1.3. Si T est un S-objet et $x : T \to X$ un T-point de X, on définit le morphisme $\psi_x : G \times_S T \to X \times_S T$ comme le morphisme $(\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times x), q)$, où

$q : G \times_S X \to X$ est la deuxième projection. On définit le *stabilisateur* $S(x)$ du T-point x comme le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} S(x) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "(x,\mathrm{id}_T)"] \\ G \times_S T \arrow[r, "\psi_x"] & X \times_S T \end{tikzcd}$$

C'est facile à voir que le stabilisateur $S(x)$ est un T-objet en groupes qui est un sous-groupe de G : en effet, pour un T-objet T', les T'-points de $S(x)$ sont les éléments g de $G(T')$ tels que $g \cdot x_{T'} = x_{T'}$, où $x_{T'}$ est le point x vu comme T'-point.

Définition 1.1.4. Supposons d'avoir une action σ d'un S-objet groupes G sur un S-objet X. On dit qu'une couple (Y, φ) avec Y un S-objet et $\varphi : X \to Y$ un morphisme est un *quotient catégorique* si

1. le diagramme
$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$
commute, où $q : G \times_S X \to X$ est la deuxième projection ;
2. pour tout (Z, ψ) satisfaisant 1, il existe un unique S-morphisme $\vartheta : Y \to Z$ telle que $\psi = \vartheta \circ \varphi$.

En autres termes un quotient catégorique est le coégualisateur des morphismes $\sigma, q : G \times_S X \to X$ et, en particulier, il est unique à un unique isomorphisme près.

1.1.2 Définitions géométriques

On va se placer dans le cadre géométrique en considérant, au place simplement d'une catégorie $\mathscr{C}$ admettant des produit fibrés, la catégorie $(\mathrm{Sch}\,/S)$ de S-schémas sur un fixé schéma de base S.

Définition 1.1.5. Dans la même notation de la définition 1.1.3, on appelle l'*orbite de* x, et désigne par $G \cdot x$, l'image en $X \times_S T$ du morphisme ψ_x.

Définition 1.1.6. On dit que l'action d'un S-schéma en groupes sur un S-schéma X est *fermée* si pour tout point géométrique x (définit sur un corps algébriquement clos Ω) l'orbite $G \cdot x \subset X \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ est fermée.

Remarque 1.1.7. Soit S un schéma et $\pi : X \to S$ un S-schéma. Si f est une section globale de $\mathscr{O}_X$, alors elle correspond à un S-morphisme $X \to \mathbf{A}^1_S$ qu'on appelle encore f. Si T est un S-schéma e $x \in X(T)$, on définit $f(x) := f \circ x \in \mathbf{A}^1_S(T) = \mathscr{O}_T(T)$.

Notons que si f appartient à l'image de $\pi^* : \Gamma(S, \mathscr{O}_S) \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, alors f est constant, i.e. $f(x) = f(y)$ pour tout S-schéma T et $x, y \in X(T)$. En plus, $f, g \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ sont égaux si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout S-schéma T et $x \in X(T)$.

Définition 1.1.8. Soit S un schéma, X un schéma sur S, G un schéma en groupes sur S avec une action $\sigma : G \times_S X \to X$. On dit que $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ est *G-invariant* si $f(g \cdot x) = f(x)$ pour tout S-schéma T, $g \in G(T)$ et $x \in X(T)$.

Lemme 1.1.9. *Soit S un schéma, X un schéma sur S, G un schéma en groupes sur S avec une action $\sigma : G \times_S X \to X$. Alors $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ est G-invariant si et seulement si le diagramme commute :*

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & \mathbf{A}^1_S \end{tikzcd}$$

où $q : G \times_S X \to X$ est la deuxième projection.

Démonstration. Supposons d'abord que f soit G-invariant. Prenons $T = G \times_S X$, $p \in G(T)$ la première projection et q, comme dans l'enoncé, la deuxième. Le point $p \cdot q := \sigma(p, q)$ est $\sigma \in X(T)$, alors $f(p \cdot q) = f(q)$ implique, par définition, la commutativité du diagramme.

D'autre part, soient T un S-schéma, $g \in G(T)$ et $x \in X(T)$. Or, le diagramme dit exactement que $f(g \cdot x) = f(x)$. $\square$

Si $\sigma^\sharp : \mathscr{O}_X \to \sigma_* \mathscr{O}_{G \times_S X}$ et $q^\sharp : \mathscr{O}_X \to q_* \mathscr{O}_{G \times_S X}$ sont les morphismes associés respectivement à σ et q, le lemme ci-dessus affirme que f est G-invariant si et seulement si $\sigma^\sharp(f) = q^\sharp(f)$.

Il est clair, par définition, que les constantes sont toujours G-invariantes et que si f, f' sont G-invariants, alors $f + f'$ et $f \cdot f'$ sont G-invariants : les sections globales de $\mathscr{O}_X$ forment qui sont G-invariantes, donc, une $\mathscr{O}_S(S)$ sous-algèbre de $\mathscr{O}_X(X)$.

Définition 1.1.10. On appelle telle sous-algèbre l'*algèbre des invariantes de* $\mathscr{O}_X(X)$ et on la désigne par $\mathscr{O}_X(X)^G$.

On n'a donné la définition que pour les sections globales, mais cette définition nous donne la notion de section G-invariante sur chaque ouvert G-invariant $U \subset X$, i.e. tel que l'action $G \times_S X \to X$ se restreint à $G \times_S U \to U$.

Dans le cas affine, qui est de premier intérêt, la formation des invariants commute au changement de base plat :

Proposition 1.1.11. *Soit* $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$ *un schéma affine sur* S *et* $G = \operatorname{Spec} B$ *un schéma en groupes affine sur* S *avec une action sur* X*. Alors pour tout* $S' = \operatorname{Spec} R'$ *plat sur* R*, on a*

$$A^G \otimes_R R' = (A \otimes_R R')^{G \times_S S'}.$$

Démonstration. D'après ce qu'on vient de dire, on a que A^G est l'égualisateur des morphismes $\sigma^\sharp, q^\sharp : A \to B \otimes_R A$, i.e. la sequence

$$0 \to A^G \to A \xrightarrow{\sigma^\sharp - q^\sharp} B \otimes_R A$$

est exacte. On obtient le résultat en tensorisant par R'. □

On passe, finalement, aux notions géométriques de quotient.

Définition 1.1.12. Supposons s'avoir donnée une action σ d'un S-schéma en groupes G sur un S-schéma X. On dit qu'une couple (Y, φ) formée par S-schéma Y et un S-morphisme $\varphi : X \to Y$ est un *quotient géométrique* si :

1. φ est un G-morphisme lorsque Y est muni de l'action triviale de G, i.e. $\varphi \circ \sigma = \varphi \circ q$;
2. φ est surjective et l'image de $\psi_{\mathrm{id}_X} = (\sigma, q) : G \times_S X \to X \times_S X$ est $X \times_Y X$;
3. φ est submersive, i.e. $V \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\varphi^{-1}(V)$ est ouvert ;
4. si $V \subset Y$ est ouvert, alors $\varphi_V^\sharp : \mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_Y(V)$ dans $\mathscr{O}_X(\varphi^{-1}(V))^G$ ($\varphi^{-1}(V)$ est un ouvert G-invariant de X).

Définition 1.1.13. Supposons de s'avoir une action σ d'un S-schéma en groupes G sur un S-schéma X. On dit qu'une couple (Y,φ) comme ci-dessus est un *quotient catégorique universel* (resp. *quotient géométrique universel*) si, pour tout morphisme $Y' \to Y$, on a que (Y',φ'), où $\varphi' := \varphi_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$, est un quotient catégorique (resp. géométrique).

Si cela a lieu seulement pour les changements de base plats $Y' \to Y$, on dit que (Y,φ) est un *quotient catégorique uniforme* (resp. *quotient géométrique uniforme*).

Proposition 1.1.14. *Soit σ une action de G sur X et on suppose qu'il existe un quotient géométrique (Y,φ). Alors (Y,φ) est un quotient catégorique, donc il est unique à un unique isomorphisme près.*

Pour la démonstration et d'autres relations entre les notions de quotient, on renvoie à [GIT, section 0.2].

1.1.3 Actions de groupes algébriques

Définition 1.1.15. Soit k un corps. Un *groupe algébrique* G sur k est un schéma en groupes de type fini et lisse sur k. Un groupe algébrique G est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathbf{GL}(V)$ avec V un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soit V un espace vectoriel sur k, alors une *action rationnelle* de G sur V est un morphisme $G \to \mathbf{GL}(V)$ de k-schémas en groupes.

Remarque 1.1.16. Soit G un groupe linéaire algébrique, alors il existe un unique sous-groupe distingué connexe résoluble maximal qu'on appelle le *radical*.

Définition 1.1.17. Soit G un groupe linéaire algébrique sur un corps algébriquement clos k et supposons qu'il soit connexe. On dit que G est

- *réductif* si le radical est un tore ;
- *linéarment réductif* (resp. *géométriquement réductif*) si pour toute action rationnelle de G sur un espace vectoriel V et tout $v \in V$ non nul fixé par cette action, il existe $f \in \mathrm{Sym}_k(V)$ G-invariant homogène de degré 1 (resp. homogène) tel que $f(v) \neq 0$.

Remarque 1.1.18. Évidemment la réductivité linéaire implique la réductivité géométrique. On peut montrer qu'un groupe géométriquement réductif est réductif et en caractéristique 0 un théorème de Weyl affirme que tout groupe réductif est linéairement réductif (et donc en caractéristique 0 les trois notions coïncident). En caractéristique p il n'y a pas beaucoup des groupes linéairement réductifs : $\mathbf{GL}(n,k), \mathbf{SL}(n,k)$ et $\mathbf{PGL}(n,k)$ ne sont pas linéairement réductifs si $\operatorname{char} k = p$ et $n \geq 2$. Dans la première version de [GIT], Mumford a conjecturé que tout groupe réductif est géométriquement réductif, ce qui a été prouvé par Haboush [Hab75]. Une preuve indépendente de ce fait par les groupes $\mathbf{GL}(n,k)$ et $\mathbf{SL}(n,k)$ a été donnée par Formanek et Procesi dans [FP76].

Exemple 1.1.19. Sur $\mathbf{C}$, si G est un groupe algébrique affine qui contient un sous-groupe K compact pour la topologie complexe et dense dans G pour la topologie de Zariski, alors G est géométriquement réductif.

Définition 1.1.20. Soit S un schéma et G un S-schéma en groupes. On dit que G est *réductif* si

- G est affine et lisse sur S ;
- pour tout point géométrique $\overline{s} \to S$, $G_{\overline{s}}$ est connexe et il est un groupe *réductif*.

Dans la suite on se bornera au cas $S = \operatorname{Spec} k$, où k est un corps non nécéssairement algébriquement clos. Les théorèmes qu'on va énoncer valent la plus part des cas sur une base S avec des hypothèses supplémentaires (par exemple, affine et de type fini sur un anneau universellement japonais). Le démonstration peuvent être trouvée dans [Ses77].

1.1.4 Quotients affines

Théorème 1.1.21 ([GIT, Theorem 1.1])**.** *Soient X un schéma affine sur un corps k, G un groupe algébrique réductif et $\sigma : G \times_k X \to X$ une action de G sur X. Alors il existe un quotient catégorique uniforme (Y, φ), φ est universellement submersive et Y est un schéma affine.*

En plus, si X est de type fini sur k, alors aussi Y l'est.

1.1.5 Linéarisation de faisceaux inversibles

Définition 1.1.22. Soit X un S-schéma, $\mathscr{L}$ un faisceau invertible sur X et G un S-schéma un groupes muni d'une action $\sigma : G \times_S X \to X$. Un *$G$-linéarisation de $\mathscr{L}$* est un isomorphisme $\varphi : \sigma^*\mathscr{L} \to q^*\mathscr{L}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
{[\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times \sigma)]^*\mathscr{L}} \arrow[r, "(\mathrm{id}_G \times\sigma)^*\varphi"] \arrow[d, equal] & {[q \circ (\mathrm{id}_G \times\sigma)]^*\mathscr{L}} \arrow[d, "p_{23}^*\varphi"] \\
{[\sigma \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)]^*\mathscr{L}} \arrow[r, "(\mu\times\mathrm{id}_X)^*\varphi"] & {[q \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)]^*\mathscr{L}}
\end{tikzcd}$$

où $q : G \times_S X \to X$ est la deuxième projection et $p_{23} : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$ la projection sur le deuxième et troisième facteur.

Remarquons que $p_{23}^*\varphi : [\sigma \circ p_{23}]^*\mathscr{L} \to [q \circ p_{23}]^*\mathscr{L}$, mais $q \circ (\mathrm{id}_G \times\sigma) = \sigma \circ p_{23}$ et $q \circ (\mu \times \mathrm{id}_X) = q \circ p_{23}$ et donc il a sens considerer le diagramme ci-dessus.

On peut montrer que une G-linéarisation de $\mathscr{L}$ correspond à l'existence d'une action $\Sigma : G \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to \mathbf{V}(\mathscr{L})$ telle que le cube suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & G \times_S G \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}) \arrow[rr, "\mathrm{id}_G \times\Sigma"] \arrow[dl, "\Sigma\times\mathrm{id}_G"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_G \times \mathrm{id}_G \times\pi"' near end] & & G \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}) \arrow[dl, "\Sigma"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_G \times\pi"] \\
G \times_S \mathbf{V}(\mathscr{L}) \arrow[rr, "\Sigma" near start, crossing over] \arrow[dd, "\mathrm{id}_G \times\pi"'] & & \mathbf{V}(\mathscr{L}) & \\
 & G \times_S G \times_S X \arrow[rr, "\mathrm{id}_G \times\sigma" near start] \arrow[dl, "\sigma\times\mathrm{id}_G"'] & & G \times_S X \arrow[dl, "\sigma"'] \\
G \times_S X \arrow[rr, "\sigma"] & & X \arrow[from=uu, "\pi" near start, crossing over] &
\end{tikzcd}$$

où $\pi : \mathbf{V}(\mathscr{L}) \to X$ est le morphisme structural. Une G-linéarisation est importante car nous permet de parler de sections invariantes du faisceau inversible $\mathscr{L}$.

Définition 1.1.23. Soit X un S-schéma, G un S-schéma un groupes muni d'une action $\sigma : G \times_S X \to X$ et $\mathscr{L}$ un faisceau invertible sur X qui admet une G-linéarisation φ. Alors no dit que $\ell \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, est *$G$-invariante* si $\varphi(\sigma^*(\ell)) = q^*(\ell)$ (où, comme avant, $q : G \times_S X \to X$ désigne la deuxième projection).

Notons que si $\mathscr{L}$ est G-linéarisé alors $\mathscr{L}^{\otimes n}$ est G-linéarisé par $\varphi^{\otimes n}$ et donc il a encore sens parler de l'invariance des sections de $\mathscr{L}^{\otimes n}$.

1.1.6 Quotients projectifs

Définition 1.1.24. Soit k un corps, X un schéma de type fini sur k, G un groupe algébrique et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible G-linéarisé par φ. Soit x un point géométrique de X, i.e. $x \in X(\overline{k})$ pour une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. On dit que :

- x est *semi-stable* s'il existe une section $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ G-invariante, telle que $f(x) \neq 0$ et X_f soit affine ;
- x est *stable* s'il existe f comme ci-dessus tel que de plus l'action sur X_f soit fermée et $\dim G \cdot y = \dim G$ pour tout $y \in X_f$.

Une clôture algébrique $\overline{k}$ de k étant fixée, notons que l'ensemble des points semi-stables (resp. stables) est l'ensemble des points géométriques d'un ouvert $X^{\mathsf{ss}}(\mathscr{L})$ (resp. $X^{\mathsf{s}}(\mathscr{L})$) de X.

Théorème 1.1.25 ([GIT, Theorem 1.10])**.** *Soit X un schéma de type fini sur k et G un groupe algébrique réductif qui agit sur X. Supposons que $\mathscr{L}$ soit un faisceau invertible G-linéarisé sur X. Alors il existe un quotient catégorique uniforme (Y, φ)de $X^{\mathsf{ss}}(\mathscr{L})$ par G.*

En plus :

1. *φ est affine et universellement submersive ;*
2. *il existe un faisceau inversible ample $\mathscr{M}$ sur Y tel que $\varphi^*\mathscr{M} \simeq \mathscr{L}^n$ pour un certain $n > 0$; ainsi Y est un schéma quasi-projectif sur k ;*
3. *$X^{\mathsf{s}}(\mathscr{L})$ est un ouvert G-invariant de X, donc de la forme $\varphi^{-1}(V)$ pour un unique V de Y ; enfin $(V, \varphi|_{X^{\mathsf{s}}(\mathscr{L})})$ est un quotient géométrique uniforme de $X^{\mathsf{s}}(\mathscr{L})$ par G.*

1.1.7 Un critère numérique de stabilité

Dans cette section on suppose que k soit algébriquement clos.

Définition 1.1.26. Soit G un k-schéma en groupes. Un *sous-groupe à 1 paramètre de G* est un morphisme non-trivial de k-schémas en groupes $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$.

Remarque 1.1.27. Comme l'image d'un morphisme de groupes algébriques est toujours fermée [Bor91, 1.4], on voit qu'un sous-groupe à un paramètre est toujours un morphisme propre.

Supposons nous être donnée une action σ d'un groupe algébrique G sur un schéma X propre sur k. Soit x un point fermé de X et λ un sous-groupe à 1 paramètre. Par propreté de X, le morphisme $\lambda \circ \psi_x : \mathbf{G}_m \to X$ se prolonge uniquement en un morphisme $\mathbf{A}^1_k \to X$: on désigne par $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$ l'image du point 0 par ce morphisme. Notons que $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$ est stable par l'action de $\mathbf{G}_m$ sur X induite par λ.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible G-linéarisé sur X et considérons la $\mathbf{G}_m$-linéarisation induite de $\mathscr{L}$ restreint au point fixe $\lim_{t\to 0} \lambda(t)$. Cette linéarisation est donné par un caractère χ tel que $\chi(t) = t^r$ pour tout $t \in \mathbf{G}_m(k)$.

Définition 1.1.28. Soit G un groupe algébrique avec une action sur X propre sur k, x un point fermé de X et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible G-linéarisé. Alors pour un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$, on pose :

$$\mu_{\mathscr{L}}(x, \lambda) = -r,$$

où r est l'entier défini par la construction précédente.

La fonction μ a des propriétés fonctorielles :
- si $g \in G(k)$, alors $\mu_{\mathscr{L}}(g \cdot x, \lambda) = \mu_{\mathscr{L}}(x, g^{-1} \cdot \lambda \cdot g)$;
- si $f : X \to Y$ est un G-morphisme, $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible G-linéarisé sur Y et $x \in X(k)$, alors $\mu_{f^*\mathscr{L}}(x, \lambda) = \mu_{\mathscr{L}}(f(x), \lambda)$;
- si $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x = y$, alors $\mu_{\mathscr{L}}(x, \lambda) = \mu_{\mathscr{L}}(y, \lambda)$.

Avant de continuer, on va interpréter la fonction μ dans le cas $X = \mathbf{P}^n_k$ et $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$.

On rappelle qu'une action linéaire d'un tore sur un espace affine peut être diagonalisée, i.e. il existe une base $v_0, \ldots, v_n$ de k^{n+1} telle que $\lambda(t) \cdot v_i = t^{r_i} v_i$ pour tout i.

Remarque 1.1.29. Soit $\vartheta : \mathbf{A}^{r+1}_k - \{0\} \to \mathbf{P}^r_k$ la projection du cone affine : si x est un k-point de $\mathbf{A}^{r+1}_k - \{0\}$, il corréspond à un surjection $k^{r+1} \to k$ et donc à un k-point de $\mathbf{P}^r_k$. Si $X \hookrightarrow \mathbf{P}^r$ est un schéma projectif, on définit $\widehat{X}$ comme l'adhérence dans $\mathbf{A}^{r+1}_k$ de $\vartheta^{-1}(X) = X \times_Y (\mathbf{A}^{r+1} - \{0\})$. Si x est un k-point de X, on dit qu'un k-point $\widehat{x}$ de $\widehat{X}$ est au-dessus de x si $\vartheta(\widehat{x}) = x$.

Remarque 1.1.30. On rappelle que toute action linéaire d'un tore $\mathbf{T} := (\mathbf{G}_m)^d$ sur un espace affine $\mathbf{A}^n$ peut être diagonalisée, c'est-à-dire qu'il existe une base

$v_1, \cdots, v_n$ de $\mathbf{A}^n(k)$ et des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_n : \mathbf{T} \to \mathbf{G}_m$ tels que pour tout $g \in \mathbf{T}(k)$ on a $g \cdot v_i = \chi_i(g)v_i$. En plus, si $t = (t_1, \ldots, t_d)$, alors tout caractère χ de $\mathbf{T}$ est de la forme

$$\chi(t) = \prod_{i=1}^{d} t_i^{r_i}$$

pour des certains entiers r_i. En particulier, supposons nous être donnée une action de $\mathbf{G}_m$ sur $\mathbf{P}^n$ qui est linéarisée par rapport à $\mathscr{O}(1)$. Alors elle est induite par une action linéaire de $\mathbf{G}_m$ sur le cone affine $\mathbf{A}^{n+1}$ et donc il existe une base $v_0, \ldots, v_n$ de $\mathbf{A}^{n+1}(k)$ telle que pour tout $g \in \mathbf{G}_m(k)$ on $g \cdot v_i = t^{r_i} v_i$ pour des certains entiers r_i.

Remarque 1.1.31. Notons que $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$ existe toujours, mais si on prend $\widehat{x}$ au-dessus de x et on regard l'action de G sur $\mathbf{A}^{n+1} - \{0\}$ qui induit celle sur $\mathbf{P}^n$ ce n'est pas vrai pour $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot \widehat{x}$ car $\mathbf{A}^n - \{0\}$ n'est pas propre sur k. Si cette dernière limite existe, on a

$$\vartheta(\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot \widehat{x}) = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x.$$

Proposition 1.1.32 ([GIT, Proposition 2.3])**.** *Soient x un point fermé de $\mathbf{P}^n$, λ un sous-groupe à un paramètre de G et $y = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$. Soit $\widehat{x}$ un point fermé au-dessus de x. Fixons des coordonnées sur $\mathbf{A}^{n+1}$ de façon telle que λ soit diagonalisée. Alors*

$$\mu_{\mathscr{O}(1)}(x, \lambda) = \max\{-r_i : i \text{ tel que } \widehat{x}_i \neq 0\}$$

où $\widehat{x} = (\widehat{x}_0, \ldots, \widehat{x}_n)$. En plus, $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot \widehat{x}$ n'existe pas (resp. existe, existe et il est 0) si et seulement si $\mu(x, \lambda) > 0$ (resp. $\mu(x, \lambda) = 0$, $\mu(x, \lambda) < 0$).

Théorème 1.1.33. *Soit G un groupe réductif qui agit sur un schéma X propre sur k. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau G-linéarisé et supposons qu'il soit ample. Si $x \in X(k)$, alors x est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $\mu_{\mathscr{L}}(x, \lambda) \geq 0$ (resp. $\mu_{\mathscr{L}}(x, \lambda) > 0$) pour tout sous-groupe à 1 paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$.*

On va donner la démonstration de ce théorème dans le cas $X = \mathbf{P}^n$, $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$ et $G = \mathbf{SL}(m, k)$. Les deux premières simplifications sont en effet le cas auquel on se réduit pour prouver le cas général, mais la troisième est un vraie simplifications car pour prouver le théorème avec G groupe réductif il faudrait remplacer la théorie des diviseur élémentaires qu'on utilisera avec un théorème de Iwahori. Avant commencer la démonstration, on a besoin de deux résultats :

Proposition 1.1.34 ([GIT, Proposition 2.2])**.** *Soit $x \in X$ et $\widehat{x}$ un point au-dessus de x. Alors*
- *x est semi-stable si et seulement si $0 \notin \overline{G \cdot \widehat{x}}$;*
- *x est stable si et seulement si le morphisme $\psi_{\widehat{x}} : G \to \mathbf{A}^{n+1}$, $g \mapsto g \cdot \widehat{x}$ est propre.*

Remarque 1.1.35. Notons que d'après ce lemme, la partie "si" du critère numérique est facile. Soit x semi-stable et supposons qu'il existe un sous-groupe à un paramètre tel que $\mu(x, \lambda) < 0$: par 1.1.32 on aurait que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot \widehat{x} = 0$ et donc 0 appartiendrait à l'adhérence de l'orbite de $\widehat{x}$.

Soit x stable et soit λ un sous-groupe à un paramètre : par le lemme ci dessus $\psi_{\widehat{x}}$ est propre et donc le morphisme $\psi_{\widehat{x}} \circ \lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{A}^{n+1} - \{0\}$ n'admet pas une extension $\mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^{n+1} - \{0\}$ (en étant $\mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^{n+1} - \{0\}$ séparé et $\psi_{\widehat{x}} \circ \lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{A}^{n+1} - \{0\}$ propre, ça impliquerait que l'immersion ouverte $\mathbf{G}_m \hookrightarrow \mathbf{A}^1$ est propre). Donc $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot \widehat{x}$ n'existe pas et par 1.1.32 on a que $\mu(x, \lambda) > 0$.

On a aussi besoin d'une version adaptée du critère valuatif de propreté :

Théorème 1.1.36. *Soient $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur un corps (non nécessairement algébriquement clos) k. Alors f est propre si et seulement si pour toute extension finie k' de k et tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où $A = k'[\![t]\!]$ et $K = k'(\!(t)\!)$, il existe un unique morphisme $\operatorname{Spec} A \to X$ qui fait commuter le diagramme.

Comme on n'a pas de référence pour cette version, on en donne la preuve en appendice.

Maintenant on peut passer à la démonstration du critère numérique :

Démonstration. D'après 1.1.35 on doit prouver seulement la partie "seulement si".

On écrit A pour l'anneau des séries formelles $k[\![t]\!]$ et K pour son corps de fractions. Si x n'est pas stable, alors $\psi_{\widehat{x}}$ n'est pas propre et le critère valuatif de propreté affirme qu'il existe $g(t) \in \mathrm{SL}(m, K)$ tel que $g(t) \cdot \widehat{x} \in A^{n+1}$, mais $g(t) \notin \mathrm{SL}(m, A)$. Comme $t^N g(t)$ appartient à $\mathrm{SL}(m, A)$ pour N assez grand et A est anneau de valuation discrète et, donc, principal, on peut appliquer la théorie des diviseurs élémentaires pour montrer qu'il existe $u(t), v(t) \in \mathrm{SL}(m, A)$ tels que

$$g(t) = u(t)h(t)v(t),$$

avec $h(t) = \mathrm{diag}(t^{r_1}, \ldots, t^{r_m})$. Comme $g(t) \in \mathrm{SL}(m, K)$ on a que $r_1 + \cdots + r_m$ est nul et comme $g(t) \notin \mathrm{SL}(m, A)$ on a que les r_i ne sont pas tous nuls. On définit un sous-groupe à un paramètre par

$$\lambda(t) := v^{-1} \mathrm{diag}(t^{r_1}, \ldots, t^{r_m})v,$$

où $v = v(0)$. Soit $e_0, \ldots, e_n$ une base de k^{n+1} telle que $\lambda(t) \cdot e_i = t^{r_i} e_i$, alors par 1.1.32 on a que

$$\mu(x, \lambda) = \max\{-r_i : \widehat{x}_i \neq 0\}$$

si $\widehat{x} = \sum_{i=0}^n \widehat{x}_i e_i$. On est donc ramené à prouver que si $\widehat{x}_i \neq 0$, alors $r_i \geq 0$. Maintenant on a

$$\begin{aligned} v^{-1}u(t)^{-1}g(t) \cdot \widehat{x} &= v^{-1}u(t)^{-1}[u(t)h(t)v(t)] \cdot \widehat{x} \\ &= (v^{-1}h(t)v)v^{-1}v(t) \cdot \widehat{x} \end{aligned}$$

On a que $[v^{-1}u(t)^{-1}g(t) \cdot \widehat{x}]_i = t^{r_i}[v^{-1}v(t) \cdot \widehat{x}]_i$ et donc

$$[v^{-1}v(t) \cdot \widehat{x}]_i = t^{-r_i}[v^{-1}u(t)^{-1}g(t) \cdot \widehat{x}]_i \in t^{-r_i}A,$$

car $g(t) \cdot \widehat{x} \in A^{n+1}$. Notons que la partie à gauche est un élément de A avec term constant $\widehat{x}_i$ et, si $\widehat{x}_i \neq 0$, cette série formelle est donc invertible en A : les r_i doivent donc être positifs. Si x n'est pas semi-stable alors on peut répéter l'argument et on peut en plus assumer que $[g(t) \cdot \widehat{x}]|_{t=0} = 0$. La partie à droite de l'équation ci-dessus appartient donc à t^{-r_i+1} et donc, si $\widehat{x}_i \neq 0$ on doit avoir que $r_i > 0$ comme on voulait. $\square$

1.1.8 Un exemple : les formes binaires

Le critère numérique de stabilité est un outil d'importance cruciale dans l'étude de la stabilité : calculer l'algèbre des invariants est toujours très compliqué. Le critère numérique nous permet de comprendre quels points sont stables et semi-stables sans devoir trouver les polynômes invariants. On donne un exemple, qu'on utilisera plus tard, de l'usage du critère.

Soit k un corps algébriquement clos et considérons la représentation de $\mathbf{SL}(2,k)$ induite par la représentation canonique $\mathbf{GL}(2,k) \to \mathbf{GL}(\mathbf{Sym}_k(k^2))$, c'est-à-dire l'action de $\mathbf{GL}(2,k)$ sur $\mathbf{Sym}_k(k^2)$ définie par

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

où $f \in \mathrm{Sym}_k(k^2)$, $g \in \mathrm{GL}(2,k)$ et $x \in \mathrm{Hom}_k(k^2,k)$. On va comprendre quelles formes binaires sont stables et quelles sont semi-stables. D'après les propriétés de la fonction μ on peut se borner à étudier les sous-groupes à un paramètre de la forme

$$\lambda_r(t) := \begin{pmatrix} t^{-r} & 0 \\ 0 & t^r \end{pmatrix},$$

pour un certain $r \in \mathbf{Z}$. Maintenant, si on écrit f comme $\sum_{i=0}^n a_i x_0^{n-i} x_1^i$, on a

$$\lambda_r(t) \cdot f = \sum_{i=0}^n t^{r(2i-n)} a_i x_0^{n-i} x_1^i.$$

L'action de λ_r est donc diagonal par la base $x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \dots, x_1^n$ de $\mathbf{Sym}_k(k^2)$, et $\mu(f,\lambda_r) = r(n-2i_0)$, où i_0 est le plus petite i tel que $a_i \neq 0$. Il en résulte que $\mu(f,\lambda_r) \geq 0$ (resp. > 0) pour tout r si et seulement si $a_i \neq 0$ pour $i > \frac{n}{2}$ (resp. $i \geq \frac{n}{2}$), i.e. si et seulement si le point $(1:0)$ est de multiplicité $\geq \frac{n}{2}$ (resp. $> \frac{n}{2}$) pour f. On en déduit :

Proposition 1.1.37 ([GIT, Proposition 4.1]). *Une forme binaire de degré n est semi-stable (resp. stable) par l'action de $\mathbf{SL}(2,k)$ si et seulement si tout point de $\mathbf{P}^1_k$ est de multiplicité $\leq \frac{n}{2}$ (resp. $< \frac{n}{2}$) pour f.*

Chapitre 2

Arithmétique

2.1 Géométrie d'Arakelov

On va introduire des concepts de base de Géométrie d'Arakelov. On peut trouver ce sujet dans plusieurs références, par exemple [Neu99], [Szp85], mais probablement la référence plus systématique, même si pas encore complétée, sont les notes du cours de Géométrie d'Arakelov de Chambert-Loir [CL].

2.1.1 Fibrés vectoriels hermitiens

Soit K un corps de nombres, $\mathfrak{o}_K$ son anneau des entiers, $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$ et $\xi = \operatorname{Spec} K$ son point générique. Soit Σ l'ensemble des plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$; on dit que $\sigma \in \Sigma$ est *réel* si $\sigma(K) \subset \mathbf{R}$ et *complexe* sinon. Si $\sigma \in \Sigma$, en composant avec la conjugaison complexe, on obtient un autre plongement $\overline{\sigma}$: clairement, $\sigma = \overline{\sigma}$ si et seulement si σ est réel.

Définition 2.1.1. Soit X un schéma de type fini sur S. Un *fibré vectoriel hermitien* $\overline{\mathscr{E}}$ sur X est la donnée $(\mathscr{E}, H)$ de

- un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur X, c'est-à-dire un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini ;
- une famille $H = \{H_x\}_{x \in X(\mathbf{C})}$, où H_x est une forme hermitienne sur $x^*\mathscr{E}$; la famille H doit être invariante par conjugaison et elle doit varier de façon continue.

On va expliciter ce que les deux dernière propriétés signifient.

Si x est un $\mathbf{C}$-point de X, en composant avec le morphisme structural $\pi : X \to S$, on obtient un unique élément de Σ : si $\sigma \in \Sigma$ et on désigne par $X_\sigma(\mathbf{C})$ l'ensemble des $\mathbf{C}$-points x de X tels que $\pi \circ x = \sigma$, on peut écrire $X(\mathbf{C})$ comme $\coprod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma(\mathbf{C})$. Notons que $X_\sigma(\mathbf{C})$ sont les $\mathbf{C}$-points de $X_\sigma := X \times_S \operatorname{Spec}\mathbf{C}$, où le morphisme $\operatorname{Spec}\mathbf{C} \to S$ est cel induit par σ.

Si $x \in X_\sigma(\mathbf{C})$, en composant avec la conjugaison complexe, on obient $\overline{x} \in X_{\overline{\sigma}}(\mathbf{C})$. Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel sur X, alors on a $\overline{x}^*\mathscr{E} = x^*\mathscr{E} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}$, où le morphisme $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est la conjugaison complexe, laquelle donne un isomorphisme de espaces vectoriels réels entre $x^*\mathscr{E}$ et $\overline{x}^*\mathscr{E}$. Si $v \in x^*\mathscr{E}$, on écrit $\overline{v}$ son image par cet isomorphisme.

Dire que la famille H est invariante par conjugaison complexe signifie que pour tout $x \in X(\mathbf{C})$ et tout $v, w \in x^*\mathscr{E}$ on a $H_{\overline{x}}(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{H_x(v,w)}$. Si $x \in X_\sigma(\mathbf{C})$ et $v \in x^*\mathscr{E}$, on pose $\|v\|_\sigma(x) := \sqrt{H_x(v,v)}$.

Soient $\pi_\sigma : X_\sigma \to X$ la projection, $U \subset X_\sigma$ un ouvert et $v, w \in \Gamma(U, \pi_\sigma^*\mathscr{E})$: considérons l'application $U(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ qui envoie un $\mathbf{C}$-point x dans $H_x(x^*v, x^*w)$. On dit que la métrique varie continûment si pour tout $\sigma \in \Sigma$, $U \subset X_\sigma$ et $v, w \in \Gamma(U, \pi_\sigma^*\mathscr{E})$ cette application est continue par la topologie analytique soit à gauche que à droite.

Si le schéma X est irréductible, alors on peut définir le rang d'un fibré hermitien $\overline{\mathscr{E}}$ comme le rang de $\mathscr{E}$.

Exemple 2.1.2. Soit $X = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_K$, alors un fibré hermitien est la donnée d'un $\mathfrak{o}_K$-module localement libre de rang fini E et pour chaque $\sigma \in \Sigma$ d'une forme hermitienne H_σ. Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base du K-espace vectoriel $E \otimes_{\mathfrak{o}_K} K$, où n est le rang de E. Les éléments $\sigma^*v_1, \ldots, \sigma^*v_n$ forment une base de σ^*E et désignons par A_σ la matrice de la forme hermitienne H_σ par rapport à cette base, c'est-à-dire $A_\sigma = \{H_\sigma(\sigma^*v_i, \sigma^*v_j)\}_{i,j=1,\ldots,n}$. La conjugaison complexe envoie σ^*v_i sur $\overline{\sigma}^*v_i$ pour tout i : dans cette notation, l'invariance par conjugaison revient à dire que $A_{\overline{\sigma}} = \overline{A_\sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Si $E = \mathfrak{o}_K$ et $\|1\|_\sigma = 1$ pour tout σ, alors on dit que le fibré hermitien est trivial.

Exemple 2.1.3. Soit $\overline{\mathscr{E}}$ un fibré hermitien sur S, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ le fibré projectif associé de morphisme structural $\pi : \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to S$. On a sur X la séquence exacte $\pi^*\mathscr{E} \to$

$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1) \to 0$, où $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1) := \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$, et on peut donc définir sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)$ une métrique hermitienne en prenant la métrique quotient par ce morphisme. Si, par exemple $\mathscr{E}$ est libre, x est un K-point de $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ et s est une section globale de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)$, on a

$$\|s\|_{\sigma}(\sigma(x)) = \frac{|\sigma(s)(\sigma(\widehat{x}))|}{\|\sigma(\widehat{x})\|_H},$$

où $\widehat{x} \in \mathscr{E}_{\xi}$ est un représentant de x. Ne dépendant pas de $\widehat{x}$ et sous-entendant le plongement σ, dans la suite, en faisant un abuse de notation, on écrira plutôt

$$\frac{|s(x)|}{\|x\|_{H_{\sigma}}}.$$

Fonctorialité. Supposons d'avoir un morphisme $f : X \to Y$ entre schémas de type fini sur S et un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{E}}$ sur Y. Alors on peut construire l'image inverse $f^*\overline{\mathscr{E}}$ de la façon suivante : comme fibré vectoriel on prend simplement $f^*\mathscr{E}$ et, pour tout $\mathbf{C}$-point x de $X(\mathbf{C})$, à travers l'isomorphisme canonique $x^*(f^*\mathscr{E}) = (f \circ x)^*\mathscr{E}$, on donne la structure hermitienne à $f^*\mathscr{E}$.

Constructions. Si $\overline{\mathscr{E}} = (\mathscr{E}, H_{\mathscr{E}})$ et $\overline{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}, H_{\mathscr{F}})$ sont des fibrés hermitiens, alors la somme directe $\mathscr{E} \oplus \mathscr{F}$, le produit tensoriel $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$, le dual $\check{\mathscr{E}} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_S)$ et le n-ième puissance extérieure $\bigwedge^n \mathscr{E}$ ($n \in \mathbf{N}$) le sont. En effet, pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a que $(\mathscr{E} \oplus \mathscr{F})_{\sigma} = \mathscr{E}_{\sigma} \oplus \mathscr{F}_{\sigma}$, $(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})_{\sigma} = \mathscr{E}_{\sigma} \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{F}_{\sigma}$, $\check{\mathscr{E}}_{\sigma} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathscr{E}_{\sigma}, \mathbf{C})$ et $(\bigwedge^n \mathscr{E})_{\sigma} = \bigwedge^n \mathscr{E}_{\sigma}$. Les formes hermitiennes sur ces $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned}
&H_{\mathscr{E}\oplus\mathscr{F}}(v \oplus w, v' \oplus w') := H_{\mathscr{E}}(v, v') + H_{\mathscr{F}}(w, w')\\
&H_{\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}}(v \otimes w, v' \otimes w') := H_{\mathscr{E}}(v, v') \cdot H_{\mathscr{F}}(w, w')\\
&H_{\check{\mathscr{E}}}(\check{v}, \check{w}) := \overline{H_{\mathscr{E}}(v, w)}\\
&H_{\wedge^n\mathscr{E}}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) := \det(H_{\mathscr{E}}(v_i, w_j)),
\end{aligned}$$

où, si $v \in \mathscr{E}_{\sigma}$, $\check{v} := H_{\mathscr{E}}(-, v)$.

Si $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens, alors $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ l'est aussi à travers l'isomorphisme canonique avec $\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$.

Définition 2.1.4. Soient $\overline{\mathscr{E}} = (\mathscr{E}, g)$ et $\overline{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}, h)$ des $\mathscr{O}_S$-modules fibrés hermitiens, alors un *morphisme de fibrés hermitiens* $\overline{\varphi} : \overline{\mathscr{E}} \to \overline{\mathscr{F}}$ est un morphisme de fibrés vectoriels $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $|\varphi(v)|_{\sigma} \leq |v|_{\sigma}$ pour chaque $v \in \mathscr{E}_{\sigma}$ et $\sigma \in \Sigma$.

2.1.2 Le degré arithmétique

Définition 2.1.5. Soit $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, h)$ un faisceau inversible hermitien sur S, $\mathscr{L} = \widetilde{L}$. On pose

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}) := \log \#(L/\ell\mathfrak{o}_K) - \sum_{\sigma\in\Sigma} \log \|\ell\|_\sigma$$

où $\ell \in L$ est non nul. On peut vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de ℓ.

Soit $\overline{\mathscr{E}}$ un fibré hermitien de rang n sur S, alors on pose $\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}) := \widehat{\deg}(\det \overline{\mathscr{E}})$, où $\det \overline{\mathscr{E}} = \bigwedge^n \overline{\mathscr{E}}$. Si $e_1, \dots, e_n$ sont des éléments de $\mathscr{E}$ linéairement indépendant sur K, on a que

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}}) = \log \# \left(\frac{E}{\mathfrak{o}_K e_1 + \cdots + \mathfrak{o}_K e_n} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\sigma\in\Sigma} \log \det(H_\sigma(e_i, e_j)).$$

2.2 Hauteurs

On introduit dans cette section le concept de hauteur à la Weil et successivement on définira des hauteurs de caractère géométrique de lesquelles on s'inspire pour définir un analogue arakelovien. On suit l'exposition dans [HS00], à laquelle on renvoie pour les details.

2.2.1 Hauteurs de Weil

Soit K un corps de nombres, $\mathfrak{o}_K$ son anneau des entiers, $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$ et $\xi = \operatorname{Spec} K$ son point générique. Soit M_K l'ensemble des valeurs absolues qui, restreint à $\mathbf{Q}$, sont égaux (ça doit être interprété littéralement, pas à équivalence prés) ou bien à une valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ ($|x|_p = p^{-v_p(x)}$, $v_p(p) = 1$) ou bien à la valeur absolue archimédienne $|\cdot|_\infty$. Si $v \in M_K$, on indique $|\cdot|_v$ la valeur absolue associée. En plus on désigne par M_K^0 (resp. M_K^∞) l'ensemble des valeurs absolues non-archimédienne (resp. archimédienne). On introduit aussi la normalisation de ces valeurs absolues : si $v \in M_K$, alors on pose $\|\cdot\|_v := |\cdot|_v^{[K_v:\mathbf{Q}_v]}$, étant K_v (resp. $\mathbf{Q}_v$) la complétion de K (resp. $\mathbf{Q}$) par v (resp. $v|_\mathbf{Q}$). On rappelle la formule du produit : si $x \in K$ est un élément non nul, alors

$$\prod_{v\in M_K} \|x\|_v = 1,$$

la formule ayant sens car $\|x\|_v = 1$ pour presque tout v.

Définition 2.2.1. Soit K un corps de nombres et $P = (P_0 : \ldots : P_n) \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}(K)$. On pose

$$H_K(P) = \prod_{v \in M_K} \max_{i=0,\ldots,n} \|P_i\|_v.$$

La formule du produit ci-dessus nous dit que $H_K(P)$ est indépendant du représentant $(P_0, \ldots, P_n) \in K^{n+1}$ de P choisi.

Si L est une extension finie de K, alors $P \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}(K)$ est aussi un point L-rationnel : on trouve que $H_L(P) = H_K(P)^{[L:K]}$. Maintenant si on fixe un clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ et on prend $P \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}(\overline{\mathbf{Q}})$, alors il existe K corps de nombres (dit un corps de définition de P) tel que $P \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}(K)$. Le nombre réel $H_K(P)^{\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}}$ est alors indépendant du K choisi.

Définition 2.2.2. On appelle *hauteur projective absolue* la fonction $H : \mathbf{P}^n_{\overline{\mathbf{Q}}}(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ qui associe à $P \in \mathbf{P}^n_{\overline{\mathbf{Q}}}(\overline{\mathbf{Q}})$ le nombre réel

$$H(P) := H_K(P)^{\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}},$$

étant K un corps de définition de P. On définit aussi l'*hauteur (logarithmique) projective absolue* h comme $\log H$.

Clairement $H(P) \geq 1$ (resp. $h(P) \geq 0$) pour tout P. Ce qui est moins clair, mais qui est la propriété pour laquelle les hauteurs sont intéressantes, est que si $c \in \mathbf{R}$ et K un corps de nombres, alors l'ensemble

$$\{P \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}(K) : H(P) \leq c\}$$

est fini. Donc, par exemple, si on démontre que un certain sous-ensemble de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}(K)$ (e.g. les points K-rationnels d'une variété projective) a hauteur bornée, alors cet ensemble est fini.

Maintenant, si V est un schéma projectif sur $\overline{\mathbf{Q}}$, $i : V \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ l'immersion fermée associée, on peut définir sur $V(\overline{\mathbf{Q}})$ simplement par restriction de celle sur $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$: ce fonction dépend du plongement i. Ce type de construction est à la base de la aussi appelée “Machine des hauteurs de Weil”, i.e. au théorème suivant :

Théorème 2.2.3 (Machine des hauteurs de Weil)**.** *Soit K un corps de nombres. A toute couple (X, D) où X est un schéma projectif lisse connexe sur K et D diviseur de X, on peut associer une classe de fonctions $h_{X,D} : X(\overline{K}) \to \mathbf{R}$ modulo fonctions bornées avec les propriétés suivantes :*

1. *Normalisation : soit $H \subset \mathbf{P}^n$ un hyperplan et h l'hauteur logarithmique absolue sur $\mathbf{P}^n$. Alors*

$$h_{\mathbf{P}^n,H}(P) = h(P) + O(1) \quad \forall P \in \mathbf{P}^n(K).$$

2. *Fonctorialité : Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme et $D \in \operatorname{Div}(Y)$. Alors*

$$h_{X,\varphi^* D}(P) = h_{Y,D}(\varphi(P)) + O(1) \quad \forall P \in X(\overline{K}).$$

3. *Additivité : Soient $D, E \in \operatorname{Div}(X)$. Alors*

$$h_{X,D+E}(P) = h_{X,D}(P) + h_{X,E} + O(1) \quad \forall P \in X(\overline{K}).$$

4. *Equivalence linéaire : Soient $D, E \in \operatorname{Div}(Y)$ avec D linéairement équivalent à E. Alors*

$$h_{X,D}(P) = h_{X,E} + O(1) \quad \forall P \in X(\overline{K}).$$

5. *Soit $D \in \operatorname{Div}(X)$ un diviseur effectif et Z le lieu base du système linéaire $|D|$. Alors*

$$h_{X,D}(P) \geq O(1) \quad \forall P \in (X - Z)(\overline{K}).$$

6. *Equivalence algébrique : Soient $D, E \in \operatorname{Div}(X)$ avec D ample et E algébriquement équivalent à 0. Alors*

$$\lim_{\substack{P \in X(\overline{K}) \\ h_{V,X(P) \to \infty}}} \frac{h_{X,E}(P)}{h_{X,D}(P)} = 0.$$

7. *Finitude : Soit $D \in \operatorname{Div}(X)$ un diviseur ample. Alors pour tout extension finie L de K et pour tout constant $C \in \mathbf{R}$, l'ensemble*

$$\{P \in X(L) : h_{X,D}(P) \leq C\}$$

est fini.

Ici, par $O(1)$ on a désigné une fonction bornée.

En plus, les fonctions hauteurs $h_{X,D}$ sont déterminées, à $O(1)$ prés, par la normalisation, la fonctorialité (seulement par les plongements de X dans un espace projectif) et l'additivité.

Comme il apparaît intuitif, on peut donner la définition de hauteur de Weil (et vérifier les mêmes propriétés) aussi pour les corps de fonctions d'une courbe projective lisse. En plus, on voudrai donner des définitions indépendantes des coordonnées : on va faire ça dans les sections suivantes, en introduisant avant la variante pour les corps de fonctions et après, en utilisant des notions de géométrie d'Arakelov, celle pour le corps de nombres.

2.2.2 Hauteurs sur une courbe lisse

Soit k un corps, $\mathscr{C}$ une courbe (i.e. un schéma noethérien intègre de dimension 1) lisse sur k et $K = \mathscr{O}_{\mathscr{C},\xi}$ son corps des fonctions (où ξ est le point générique de $\mathscr{C}$). Soit X un schéma propre sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. Soit K' une extension finie de K et P un L-point de X : par propreté de X, il existe un unique $\mathscr{C}'$-point $\mathfrak{P}$ de X dont la restriction à la fibre générique est P ($\mathscr{C}'$ la normalisation de $\mathscr{C}$ en K').

Définition 2.2.4. Avec les notations ci-dessus, on définit la *hauteur de P associée à $\mathscr{L}$* par

$$h_{\mathscr{L}}(P) := \frac{1}{[K' : K]} \deg \mathfrak{P}^* \mathscr{L},$$

la formule avant sens car $\mathfrak{P}^* \mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur $\mathscr{C}'$.

C'est facile à voir que la définition ne dépend pas du corps K' et, donc, la hauteur est une fonction bien définie de $X(\overline{K})$ en $\mathbf{Q}$, en étant $\overline{K}$ une fixée clôture algébrique de K.

On peut montrer que des propriétés analogues à 2.2.3 sont satisfaites [HS00, Theorem B.10.4].

Invariance par conjugaison. Soient $\mathscr{C}$ une courbe projective lisse, K son corps des fonctions, K^{sep} une clôture séparable et $G = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$. Soit X un schéma de type fini sur $\mathscr{C}$. Supposons d'avoir L une extension finie séparable de K inclue dans K^{sep} et x un T-point de X, où $\mathscr{D}'$ est la normalisation de $\mathscr{C}$ dans L. Alors, pour tout $g \in G$, on a un isomorphisme, qu'on appelera encore g, de $\mathscr{D}'$ vers $\mathscr{D}$, où $L' := g(L) \subset K^{\mathrm{sep}}$ et $\mathscr{D}'$ est la normalisation de $\mathscr{C}$ dans L'. En composant avec le point x, on obtient un $\mathscr{D}'$-point x' de X, car g induit l'identité sur K (et donc sur $\mathscr{C}$).

Soit, maintenant, $\overline{\mathscr{L}}$ un faisceau inversible sur X, alors on a

$$h_{\mathscr{L}}(x) = \frac{1}{[L:K]}\deg(x^*\mathscr{L}) \qquad \text{et} \qquad h_{\mathscr{L}}(x') = \frac{1}{[L':K]}\deg(x'^*\mathscr{L}),$$

mais clairement $[L':K] = [L:K]$ et $\deg(x^*\mathscr{L})$ est égale à $\deg(x'^*\mathscr{L})$, car g induit un isomorphisme entre le groupe de Picard des deux courbes compatible avec le degré. Les hauteurs des points x et x' sont donc égaux.

2.2.3 Hauteurs sur une courbe arithmétique

On veut maintenant faire une construction analogue quand $\mathscr{C}$ est remplacée par une courbe arithmétique $S = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_K$, K un corps de nombres.

Soit X un schéma projectif sur S et $\overline{\mathscr{L}}$ un faisceau inversible hermitien. Si K' une extension finie de K et P un K'-point de X, alors, comme avant, il existe un unique $\mathfrak{o}_{K'}$-point $\mathfrak{P}$ de X dont la fibre générique est P.

Définition 2.2.5. Avec les notations ci-dessus, on définit la *hauteur de P associée* par

$$h_{\overline{\mathscr{L}}} := \frac{1}{[K':\mathbf{Q}]}\widehat{\deg}\,\mathfrak{P}^*\overline{\mathscr{L}},$$

la formule avant sens car $\mathfrak{P}^*\overline{\mathscr{L}}$ est un faisceau inversible hermitien sur $S' = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_{K'}$.

Exemple 2.2.6. Soit $S = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_K$, $X = \mathbf{P}^n_S$, H une métrique hermitienne sur $\mathscr{E} = \mathscr{O}_S^{n+1}$ et $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)$. Comme dans l'exemple 2.1.3, on définit sur $\mathscr{L}$ la métrique quotient induite par celle de $\pi^*\overline{\mathscr{E}}$ ($\pi : \mathbf{P}^n_S \to S$ le morphisme structural), i.e. si $s = a_0t_0 + \ldots a_nt_n$ est une section globale de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)$ et $x = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbf{P}^n(K)$ on a que

$$\|s\|_\sigma(x) = \frac{|a_0x_0 + \cdots + a_nx_n|}{\|x\|_{H_\sigma}}.$$

Supposons que x_0 ne soit pas nul (autrement on fait le calcul avec un autre x_i), alors on a que

$$\begin{aligned}
h_{\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}}(x) &= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\log \#\left(\frac{x_0\mathfrak{o}_K + \cdots + x_n\mathfrak{o}_K}{x_0\mathfrak{o}_K}\right) - \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma}\|t_0\|_\sigma(x) \\
&= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{v\in M_K^0}\log\frac{\max\{|x_0|_v,\ldots,|x_n|_v\}}{|x_0|_v} - \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma}\log\frac{|\sigma(x_0)|}{\|x\|_{H_\sigma}} \\
&= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{v\in M_K^0}\log\max\{|x_0|_v,\ldots,|x_n|_v\} + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma}\log\|x\|_{H_\sigma}
\end{aligned}$$

On peut montrer [HS00, Theorem B.10.7] que cette définition origine des hauteurs qui satisfont les propriétés de la Machine de Weil 2.2.3.

Invariance par conjugaison. Soient K un corps de nombres, $\overline{K}$ une clôture algébrique et $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Soient $\mathfrak{o}_K$ l'anneau des entiers de K et $S = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_K$ et X un schéma de type fini sur S. Supposons d'avoir L une extension finie de K inclue dans $\overline{K}$ et x un T-point de X, où $T = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_L$. Alors, pour tout $g \in G$, on a un isomorphisme, qu'on appelera encore g, de $T' := \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_{L'}$ vers T, où $L' := g(L) \subset \overline{K}$. En composant avec le point x, on obtient un T'-point x' de X, car g fixe K (et donc $\mathfrak{o}_K$).

Soit, maintenant, $\overline{\mathscr{L}}$ un faisceau hermitien sur X, alors on a

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) = \frac{1}{[L:\mathbf{Q}]}\widehat{\deg}(x^*\overline{\mathscr{L}}) \qquad \text{et} \qquad h_{\overline{\mathscr{L}}}(x') = \frac{1}{[L':\mathbf{Q}]}\widehat{\deg}(x'^*\overline{\mathscr{L}}),$$

mais clairement $[L':\mathbf{Q}] = [L:\mathbf{Q}]$ et on voit aussitôt que $\widehat{\deg}(x^*\overline{\mathscr{L}})$ est égale à $\widehat{\deg}(x'^*\overline{\mathscr{L}})$. Les hauteurs des points x et x' sont donc égaux.

Chapitre 3

Les minorations de hauteurs

3.1 Rappels sur les schémas en groupes linéaires

On fait des rappels sur les schémas en groupes linéaires [EGA I, 9.6].

Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini, on définit $\mathbf{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F}) := \mathbf{V}(\check{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E})$: c'est un S-schéma qui représente le foncteur que à un S-schéma $\pi : X \to S$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\mathscr{E}, \pi^*\mathscr{F})$. En particulier, si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini, alors $\mathbf{End}(\mathscr{F}) := \mathbf{V}(\check{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})$ est un S-schéma en algèbres (non commutatives) et $\mathbf{V}(\check{\mathscr{F}})$ est un S-schéma en modules à gauche sur ce S-schéma en algèbres.

En choisissant localement une base de $\mathscr{F}$, on peut définir la section déterminant de $\check{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$ et montrer que le foncteur $\mathrm{Aut}(\mathscr{F})$ qui associe à S-schéma $\pi : X \to S$ le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\mathscr{F})$ est représenté par un S-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathscr{F})$, isomorphe à un schéma induit sur un ouvert de $\mathbf{End}(\mathscr{F})$. Si $\mathscr{F} = \mathscr{O}_S^n$, alors on désigne $\mathbf{GL}(\mathscr{F})$ par $\mathbf{GL}(n,S)$; si $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathscr{F} = \widetilde{F}$, on écrit $\mathbf{GL}(F)$ et $\mathbf{GL}(n,A)$ respectivement au place de $\mathbf{GL}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{GL}(n,S)$.

De l'action du S-schéma en algèbres $\mathbf{End}(\mathscr{F})$ sur $\mathbf{V}(\check{\mathscr{F}})$ on déduit canoniquement une action du S-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathscr{F})$ sur le S-schéma $\mathbf{V}(\check{\mathscr{F}})$.

On construit de même $\mathbf{SL}(n,S)$ et $\mathbf{SL}(\mathscr{F})$.

Définition 3.1.1. Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini. On appelle une *représentation linéaire algébrique (sur $\mathscr{F}$)* un morphisme $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ de S-schémas en groupes.

Exemple 3.1.2. Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules et $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, alors on définit l'*application transposée* $\check{\varphi} : \check{\mathscr{F}} \to \check{\mathscr{G}}$: si $U \subset X$ est un ouvert de X, $\varphi|_U \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ donc elle induit

$$\check{\varphi}|_U : \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)(U) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{O}_X)(U).$$

La famille $\{\check{\varphi}|_U\}_U$ est compatible aux restrictions et donc définit $\check{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{F}}, \check{\mathscr{G}})$.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini, alors on a une représentation linéaire algébrique canonique $\omega : \mathbf{GL}(\mathscr{F}) \to \mathbf{GL}(\check{\mathscr{F}})$. Si $\pi : X \to S$ est un S-schéma, $\varphi \in \mathbf{GL}(\mathscr{F})(X) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\mathscr{F})$, alors $\omega(\varphi) := \check{\varphi}^{-1}$.

Si $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ est une représentation linéaire algébrique, alors on définit la *représentation duale* $\check{\rho}$ par $\omega \circ \rho$.

Exemple 3.1.3. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_S$-modules localement libre de rang fini, G un S-schéma en groupes, $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ et $\sigma : G \to \mathbf{GL}(\mathscr{G})$ sont des représentations linéaires algébriques, alors aussi $G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})$, $G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})$, $G \to \mathbf{GL}(\mathbf{Sym}^d(\mathscr{F}))$ ($d \in \mathbf{N}$) et $G \to \mathbf{GL}(\bigwedge^e \mathscr{F})$ ($e \in \mathbf{N}$) le sont.

Exemple 3.1.4. Cet exemple généralise le deux précédents. Soit S un schéma (Sch/S) la catégorie des schémas sur S et $\mathscr{C}$ la catégorie fibrée des faisceaux localement libre de rang fini. Si $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est un foncteur de catégories fibrées sur (Sch/S), alors pour chaque $\mathscr{F}$ faisceau localement libre de rang fini sur S on a une représentation linéaire algébrique canonique $\rho_{T,\mathscr{F}} : \mathbf{GL}(\mathscr{F}) \to \mathbf{GL}(T(\mathscr{F}))$. En effet, si $\pi : X \to S$ est un S-schéma et $\varphi \in \mathbf{GL}(\mathscr{F})(X) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\mathscr{F})$, alors $T(\varphi) \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_X}(T(\pi^*\mathscr{F}))$, mais, comme T est un foncteur de catégories fibrées, $T(\pi^*\mathscr{F}) = \pi^*T(\mathscr{F})$ et donc $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_X}(\pi^*T(\mathscr{F}))$.

Remarque 3.1.5. Soit S un schéma, $\mathscr{F}$ un faisceau localement libre de rang fini sur S et G un S-schéma en groupes muni d'une représentation linéaire algébrique $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$. Si $\pi : S' \to S$ est un S-schéma, alors on a une représentation linéaire algébrique $\rho' : G \times_S S' \to \mathbf{GL}(\pi^*\mathscr{F})$.

3.2 Le cas géométrique

3.2.1 Le fibré vectoriel associé à une représentation

Construction 3.2.1. Soient S un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini et $\rho : \mathbf{GL}(n, S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ une représentation linéaire algébrique. Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang n, trivialisé sur un recouvrement $S = \bigcup S_i$ par des isomorphismes $\alpha_i : \mathscr{O}_{S_i} \to \mathscr{E}|_{S_i}$ et par des morphismes de transition φ_{ij} (i.e. $\alpha_i|_{S_{ij}} = \alpha_j|_{S_{ij}} \circ \varphi_{ij}$, où $S_{ij} = S_i \cap S_j$). On peut, alors, définir un faisceau $\mathscr{E}_\rho$ sur S avec les donnés de recollement suivantes : sur S_i on prend le faisceau $\mathscr{G}_i := \mathscr{F}|_{S_i}$ et comme morphismes de transition $\psi_{ij} := \rho_{S_{ij}}(\varphi_{ij})$ (ce dernier est défini car $\mathbf{GL}(\mathscr{F})(S_{ij}) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{S_{ij}}}(\mathscr{F}|_{S_{ij}})$). Clairement, $\mathscr{E}_\rho$ est localement libre du même rang que $\mathscr{F}$ et il est unique à un unique isomorphisme prés. En plus, on peut vérifier que cette construction ne dépend pas des isomorphismes α_i et du recouvrement $\{S_i\}_{i \in I}$ choisis.

Définition 3.2.2. Avec le mêmes notations de la construction ci-dessus, on appelle $\mathscr{E}_\rho$ le *faisceau associé à $\mathscr{E}$ et ρ.*

Remarque 3.2.3. La même construction peut être faite vraiment plus en général pour S un espace annelé quelconque et pour des $\mathscr{O}_S$-modules $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ qui ne sont pas localement libres, mais il faut remplacer l'hypothèse que ρ soit un morphisme de S-schéma en groupes par l'hypothèse que $\rho : \mathrm{Aut}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Aut}(\mathscr{F})$ soit un morphisme de foncteurs (si $U \subset S$ est un ouvert de S on a besoin que $\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{E}|_U) \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U)$ soit un morphisme de groupes). Si les foncteurs $\mathrm{Aut}(\mathscr{E}), \mathrm{Aut}(\mathscr{F})$ sont représentables dans là (sous)-catégorie des espace annelé où on se place (schémas, variétés complexes, ...), c'est le même de demander que ρ soit un morphisme S-objets un groupes dans cette (sous)-catégorie.

Exemple 3.2.4. On reprend les notations de 3.1.4 et on considère la représentation $\rho = \rho_{T, \mathscr{O}_S^n} : \mathbf{GL}(\mathscr{O}_S^n) \to \mathbf{GL}(T(\mathscr{O}_S^n))$. Si $\mathscr{E}$ est un faisceau localement libre de rang n, alors le faisceau $\mathscr{E}_\rho$ est canoniquement isomorphe à $T(\mathscr{E})$, car ils satisfont les mêmes donnés de recollement. En particulier, si $T = -^{\otimes d}$ ($d \in \mathbf{Z}$) (resp. $T = \mathbf{Sym}^e(-)$ ($e \in \mathbf{N}$), $T = \bigwedge^f -$ ($f \in \mathbf{N}$), $T = \check{-}$) alors $\mathscr{E}_\rho = \mathscr{E}^{\otimes d}$ (resp. $\mathscr{E}_\rho = \mathbf{Sym}^e(\mathscr{E})$, $\mathscr{E}_\rho = \bigwedge^f \mathscr{E}$, $T = \check{\mathscr{E}}$).

Remarque 3.2.5. Si S est un schéma, $\mathscr{F}$ un faisceau localement libre de rang fini, $\rho : \mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ une représentation linéaire algébrique et $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang n. Si $\pi : S' \to S$ est un S-schéma et $\rho' : \mathbf{GL}(n,S') \to \mathbf{GL}(\pi^*\mathscr{F})$ la représentation induite par ρ, alors $(\pi^*\mathscr{E})_{\rho'} = \pi^*(\mathscr{E}_\rho)$, car ils satisfont les mêmes données de recollement.

3.2.2 Polynômes invariants et sections non nulles

Définition 3.2.6. Soit S un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini. On dit que une représentation linéaire algébrique $\rho : \mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ est *homogène de degré a* si pour tout S-schéma X on a $\rho(t \cdot \mathrm{id}) = t^a \cdot \mathrm{id}$ pour tout $t \in \mathbb{G}_m(X)$.

Exemple 3.2.7. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_S$-modules localement libre de rang fini, $\rho : \mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ et $\sigma : \mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{G})$ sont des représentations linéaires algébriques homogène de degré a et b respectivement, alors aussi $\mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\check{\mathscr{F}})$, $\mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})$, $\mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathbf{Sym}_d(\mathscr{F}))$ et $\mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\bigwedge^d \mathscr{F})$ ($d \in \mathbf{N}$) le sont (resp. de degré $-a$, $a+b$, da et encore da).

Remarque 3.2.8. Soit G un S-schéma en groupes sur S, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini et $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ une représentation linéaire algébrique. Grâce à l'action naturelle de $\mathbf{GL}(\check{\mathscr{F}})$ sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et à la représentation duale $\check{\rho}$, on obtient une action de G sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$.

Lemme 3.2.9. *Soit S un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini et $\rho : \mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ une représentation linéaire algébrique homogène de degré a. Supposons que $f \in \Gamma(S, \mathbf{Sym}(\mathscr{F}))$ soit un polynôme homogène $\mathbf{SL}(n,S)$-invariant (à travers ρ) de degré d. Alors $\frac{ad}{n} \in \mathbf{Z}$ et*

$$f(\check{\rho}_X(g) \cdot x) = (\det g)^{-\frac{ad}{n}} f(x)$$

pour tout $g \in \mathbf{GL}(n,S)(X)$ et $x \in \mathbf{V}(\mathscr{F})(X)$, où X est un S-schéma.

On peut se ramener au cas où S et X sont affines, i.e. à l'énoncé suivant :

Lemme 3.2.10 (version affine de 3.2.9). *Soit A un anneau, M un A-module localement libre de rang r et $\rho : \mathbf{GL}(n,A) \to \mathbf{GL}(M)$ une représentation linéaire* *algébrique homogène de degré a. Supposons que $f \in \mathrm{Sym}(M)$ soit un polynôme homogène $\mathbf{SL}(n,A)$-invariant de degré d (à travers ρ). Alors $\frac{ad}{n} \in \mathbf{Z}$ et*

$$f(\check{\rho}_B(g) \cdot m) = (\det g)^{-\frac{ad}{n}} f(m)$$

pour toutes A-algèbres B, $g \in \mathrm{GL}_n(B)$ et $m \in \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, B)$.

Démonstration. Si on désigne $\det(t_{ij})$ par Δ, alors on peut écrire $G := \mathbf{GL}(n,A) = \mathrm{Spec}(A[t_{11},\ldots,t_{nn}]_\Delta)$. On définit

$$H := \mathrm{Spec}(A[t_{11},\ldots,t_{nn},\lambda]_\Delta/(\lambda^n - \Delta)),$$

qui est recouvrement dominant intègre de degré n de G, où on a “une racine n-ième du determinant”. Notons d'abord qu'on a un isomorphisme $\alpha : \mathbf{G}_m \times_A \mathbf{SL}(n,A) \to H$ de A-schémas en groupes : en effet il suffit de considérer le morphisme de A-algèbres $t_{ij} \mapsto \frac{t_{ij}}{\lambda}$ et λ en lui même. Si X est un A-schéma, α envoie $(t,h) \in \mathrm{SL}(n,A)(X) \times \mathbf{G}_m(X)$ sur $t \cdot h$.

Comme $H \to G$ est dominant, si X est un A-schéma, alors $X(G) \hookrightarrow X(H)$ et on identifiera dans la suite $X(G)$ avec son image dans $X(H)$. Soient $g \in G(G)$, $\lambda \cdot \mathrm{id} \in G(H)$ et $h \in H(G)$ les points qui correspondent respectivement aux morphismes id_G, $t_{ij} \mapsto \delta_{ij}\lambda$ (δ_{ij} désigne le symbol de Kronecker) et $t_{ij} \mapsto \frac{t_{ij}}{\lambda}$, i.e. aux matrices $(t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $\lambda \cdot \mathrm{id}$ et $(\frac{t_{ij}}{\lambda})_{i,j=1,\ldots,n}$.

En composant avec la première projection $H \times_A \mathbf{V}(\mathscr{F}) \to H$, on peut voir g, $\lambda \cdot \mathrm{id}$ et h comme éléments de $G(H \times_A \mathbf{V}(\mathscr{F}))$. Soit $x \in \mathbf{V}(\mathscr{F})(H \times_A \mathbf{V}(\mathscr{F}))$ la deuxième projection. Comme f est $\mathbf{SL}(n,A)$-invariant et homogène de degré d et $\check{\rho}$ est homogène de degré $-a$, on a

$$\begin{aligned} f(\check{\rho}_{H \times_A \mathbf{V}(\mathscr{F})}(g) \cdot x) &= f(\check{\rho}(\lambda \cdot \mathrm{id})\check{\rho}(h) \cdot x) = f(\lambda^{-a} \mathrm{id} \cdot x) \\ &= \lambda^{-ad} f(x). \end{aligned}$$

D'autre parte, dans $G(G)$ on peut écrire

$$g = \begin{pmatrix} \Delta & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} h'$$

avec $h' \in \mathbf{SL}(n,S)(G)$. Précisément, la première matrice, disons g', du terme à droite correspond au morphisme $t_{ij} \mapsto \delta_{ij}$ si $i > 1$ ou $j > 1$ et $t_{11} \mapsto \Delta$; la deuxième correspond au morphisme $t_{ij} \mapsto t_{ij}$ si $i > 1$ et $t_{1j} \mapsto \frac{t_{1j}}{\Delta}$. Il suit que

$$f(\check{\rho}_{H \times_A \mathbf{V}(\mathscr{F})}(g) \cdot x) = f(\check{\rho}(g')\check{\rho}(h) \cdot x) = f(\check{\rho}(g') \cdot x).$$

Maintenant $f(\check{\rho}(g)\cdot x)$ est l'image de $f \in \mathrm{Sym}_A(M)$ dans $\mathrm{Sym}_A(M) \otimes \mathscr{O}_H(H)$ par le morphisme induit par l'action de H, mais d'aprés ce qu'on vient de voir on a que $f(\check{\rho}(g)\cdot x) \in \mathrm{Sym}_A(M) \otimes_A A[\Delta]_\Delta$, i.e. il s'écrit de la forme $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i \Delta^i$ avec les $\alpha_i \in \mathrm{Sym}_A(M)$ presque tous nuls. Finalement, dans $\mathrm{Sym}_A(M) \otimes \mathscr{O}_H(H)$ on obtient l'égalité $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i \lambda^{in} = \lambda^{-ad} f$, d'où on déduit le résultat. □

Construction 3.2.11. Soient S un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini, $\rho : \mathbf{GL}(n,S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ une représentation linéaire algébrique homogène de degré a, $f \in \Gamma(S, \mathbf{Sym}(\mathscr{F}))$ un polynôme homogène $\mathbf{SL}(n,S)$-invariant de degré d. Soient $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang n (on peut donc construire $\mathscr{E}_\rho$) et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible. Alors une section $s \in \Gamma(S, \check{\mathscr{E}}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L})$ définit une unique section globale de $\det(\mathscr{E})^{\otimes -\frac{ad}{n}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}^{\otimes d}$ de la façon suivante : soit $S = \bigcup S_i$ un recouvrement qui trivialise $\mathscr{E}$ et $\mathscr{L}$ par des isomorphismes $\alpha_i : \mathscr{O}_{S_i}^n \to \mathscr{E}|_{S_i}$ et $\beta_i : \mathscr{O}_{S_i} \to \mathscr{L}|_{S_i}$. Soient φ_{ij} et ψ_{ij} les morphismes de transition associés respectivement à $\mathscr{E}$ et $\mathscr{L}$ (c'est-à-dire $\alpha_i|_{S_{ij}} = \alpha_j|_{S_{ij}} \circ \varphi_{ij}$ et $\beta_i|_{S_{ij}} = \beta_j|_{S_{ij}} \circ \psi_{ij}$, où $S_{ij} = S_i \cap S_j$). Le faisceau $\check{\mathscr{E}}_\rho$ est alors trivialisé par des morphismes $\check{\alpha}_{i\rho} : \check{\mathscr{F}}|_{S_i} \to \check{\mathscr{E}}_\rho|_{S_i}$ avec morphismes de transition $\check{\rho}(\varphi_{ij})$.

Maintenant, $s|_{S_i} \in \Gamma(S_i, \check{\mathscr{E}}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L})$, donc, via $\check{\alpha}_{i\rho} \otimes \beta_i$, définit une section $t_i \in \Gamma(S_i, \check{\mathscr{F}})$ avec les relations

$$t_j|_{S_{ij}} = (\check{\rho}(\varphi_{ij}) \otimes \psi_{ij})(t_i|_{S_{ij}})$$

pour tout i, j. Donc, par 3.2.9,

$$\begin{aligned} f(t_j)|_{S_{ij}} &= f(t_j|_{S_{ij}}) = f((\check{\rho}(\varphi_{ij}) \otimes \psi_{ij})(t_i|_{S_{ij}})) \\ &= \det(\varphi_{ij})^{-\frac{ad}{n}} f((\mathrm{id} \otimes \psi_{ij})(t_i|_{S_{ij}})). \end{aligned}$$

Le $\mathscr{O}_S$-module $\det(\mathscr{E})^{\otimes -\frac{ad}{n}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}^{\otimes d}$ est trivialisé sur S_i par $\det(\alpha_i)^{-\frac{ad}{n}} \otimes \beta_i^{\otimes d}$ et donc, en prenant l'image réciproque $f(t_i)$ par cet isomorphisme pour chaque i, on définit $f(s)$.

3.2.3 Le théorème dans le cas géométrique

Dans ce paragraph $\mathscr{C}$ désignera une courbe projective sur un corps k, K son corps des fonctions et $\xi : \operatorname{Spec} K \to \mathscr{C}$ son point générique.

Remarque 3.2.12. Soient F un espace vectoriel sur k et $\rho_k : \mathbf{GL}(n,k) \to \mathbf{GL}(F)$ une représentation linéaire algébrique. Par changement de base par $\mathscr{C}$ on en déduit une représentation linéaire algébrique

$$\rho : \mathbf{GL}(n,\mathscr{C}) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F}),$$

où, si $\pi : \mathscr{C} \to k$ est le morphisme structural, $\mathscr{F} := \pi^* F$. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$-module localement libre de rang n, on peut considérer $\mathscr{E}_\rho$.

Théorème 3.2.13. *Soient F un k-espace vectoriel de rang r, $\rho_k : \mathbf{GL}(n,k) \to \mathbf{GL}(F)$ une représentation linéaire algébrique homogène de degré a et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$-module localement libre de rang n.*

Soit $P \in \mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho)(\mathscr{C})$ un point telle que sa restriction au point générique P_ξ soit semi-stable pour l'action de $\mathbf{SL}(n,K)$. Alors

$$h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho),\mathscr{O}(1)}(P) \geq a \cdot \frac{\deg(\mathscr{E})}{\mathrm{rk}(\mathscr{E})}.$$

Remarque 3.2.14. L'hypothèse sur ρ d'être induite par une représentation sur k est nécessaire dans la démonstration pour pouvoir affirmer qu'il existe un polynôme invariant f appartenant aux sectiones globales de $\mathbf{Sym}(\mathscr{F})$. Cette hypothèse disparêtra dans le cas géométrique car on aura le schéma affine $\mathrm{Spec}\, \mathfrak{o}_K$ au place de la courbe projective $\mathscr{C}$, qui n'est pas affine.

Démonstration. Comme le point P_ξ est semi-stable pour l'action de $\mathbf{SL}(n,K)$, alors il existe $f \in \mathrm{Sym}_K(\mathscr{E}_{\rho,\xi})$ homogène de degré d et $\mathbf{SL}(n,K)$-invariant telle que $f(P_\xi) \neq 0$. On a que $\mathscr{E}_{\rho,\xi}$ est isomorphe à $F \otimes_k K$ et on peut voir f comme un élément de $\mathrm{Sym}_K(F \otimes_k K)$. Puisque la formation des invariants commute au changement de base, on peut supposer que f soit dans $\mathrm{Sym}_k(F)$ et donc dans $\Gamma(\mathscr{C}, \mathbf{Sym}(\mathscr{F})) \simeq \mathrm{Sym}_k(F) \otimes_k \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C})$.

Le point P correspond à un morphisme surjective de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$-modules $\mathscr{E}_\rho \to \mathscr{L} \to 0$, où $\mathscr{L} = P^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho)}(1)$ est un faisceau inversible sur $\mathscr{C}$. En dualisant et en tensorisant par $\mathscr{L}$, on obtient que P correspond à une injection

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathscr{C}} \to \check{\mathscr{E}}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}}} \mathscr{L},$$

i.e. à une section non nulle $s \in \Gamma(\mathscr{C}, \check{\mathscr{E}}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}}} \mathscr{L})$. La construction précédente alors nous donne une section $f(s)$ non nulle de $\det(\mathscr{E})^{\otimes - \frac{ad}{n}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}^{\otimes d}$. On peut donc conclure car, par définition, $h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho),\mathscr{O}(1)}(P) = \deg(\mathscr{L})$ et donc

$$\deg(\mathscr{L}) - \frac{a}{n}\deg(\mathscr{E}) = \frac{\deg(\det(\mathscr{E})^{\otimes -\frac{ad}{n}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}^{\otimes d})}{d} \geq 0$$

par l'existence de $f(s)$. □

Remarque 3.2.15. Ce résultat généralise partialement le Theorem III de [Bos94] dans ce sens : si Z est un cycle effectif de $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, on peut lui associer son point de Chow $[\Phi_Z] \in \mathbf{P}(F_{d,\delta}(\mathscr{E}))$, où $F_{d,\delta}(\mathscr{E}) := \mathrm{Sym}^\delta(\mathscr{E})^{\otimes d}$, $d \geq 1$ est la dimension de Z et $\delta = \deg_K(Z_K)$. En utilisant la Proposition 1.2 de [Bos94], on peut dire que si Z est plat sur $\mathscr{C}$, alors

$$h_{\mathbf{P}(F_{d,\delta}(\mathscr{E})),\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}([\Phi_Z]) = h_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}(Z) := \deg_k(c_1(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1))^d \cdot [Z]),$$

où $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1) := \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$. Donc, si Z est plat sur $\mathscr{C}$, on obtient le Theorem III en appliquant 3.2.13 avec la représentation canonique $\rho : \mathbf{GL}(n, S) \to \mathbf{GL}(F_{d,\delta}(\mathscr{O}_S))$, qui est homogène de degré $d\delta$.

La changement de signe est dû au fait que dans celle article on n'utilise pas la convention de Grothendieck par la construction des fibrés projectif, mais la duale, i.e. $\mathbf{P}(\mathscr{E}) := \mathbf{Proj}(\mathbf{Sym}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}}))$.

Remarque 3.2.16. Avec les notations du théorème, soient K' une extension finie séparable de K', $\mathscr{C}'$ la normalisation de $\mathscr{C}$ en K et supposons que P soit un $\mathscr{C}'$-point et pas forcement un $\mathscr{C}$-point. D'après 3.2.5, on peut appliquer le théorème à la représentation $\rho' : \mathbf{GL}(n, \mathscr{C}') \to \mathbf{GL}(\pi^*\mathscr{F})$ pour obtenir

$$h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho),\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}(P) \geq a \cdot \frac{\deg \mathscr{E}}{\mathrm{rk}\, \mathscr{E}}.$$

Remarque 3.2.17. Avec les notations du théorème, soient K^{sep} une clôture séparable de K, $P \in \mathbf{P}^{r-1}(K^{\mathrm{sep}})$, K' le corps de définition de P et $\mathscr{C}'$ la normalisation de $\mathscr{C}$ dans K'. En étant $\mathscr{C}'$ normal et $\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho)$ projectif sur $\mathscr{C}$, il existe un $\mathscr{C}'$-point $\mathfrak{P}$ dont fibre générique est P.

D'après ces deux remarques, on peut formuler 3.2.13 de la façon suivante :

Corollaire 3.2.18. *Avec les mêmes notations de 3.2.13, supposons que $P \in \mathbf{P}_K^{r-1}(K^{sep})$ soit semi-stable par l'action de $\mathbf{SL}(n, K^{sep})$ induite par ρ. Alors pour* *tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$ de rang n on a que*

$$h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho),\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}(P) \geq a \cdot \frac{\deg \mathscr{E}}{\operatorname{rk} \mathscr{E}}.$$

3.3 Le cas arithmétique

3.3.1 Représentations compactifiées

Dans cette section, on va construire l'analogue en géométrie d'Arakelov du $\mathscr{E}_\rho$ de la section précédente, i.e. $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}_\rho$ doivent être fibrés vectoriels compactifiés. Pour faire ça, on doit rajouter des donnés à la définition de représentation linéaire algébrique. Dans ce qu'il suit, K sera un corps de nombres, $\mathfrak{o}_K$ son anneau des entiers et $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$.

Définition 3.3.1. Soient $\overline{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}, H)$ un fibré vectoriel hermitien sur S et ρ : $\mathbf{GL}(n, S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ une représentation linéaire algébrique. On dit que $\overline{\rho} = (\rho, \overline{\mathscr{F}})$ est une *représentation linéaire algébrique compactifiée* si H_σ est une forme hermitienne $\mathrm{U}(n, \mathbf{C})$-invariant pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Soit $\overline{\rho} = (\rho, \overline{\mathscr{F}})$ une représentation linéaire algébrique compactifiée et $\overline{\mathscr{E}}$ un fibré vectoriel hermitien de rang n. En oubliant les structures hermitiens, on peut construire $\mathscr{E}_\rho$. Ce qu'on fait est de rajouter à $\mathscr{E}_{\rho,\sigma}$ une forme hermitienne $H_{\mathscr{E},\sigma}$ telle que $H_{\mathscr{E},\overline{\sigma}} = \overline{H}_{\mathscr{E},\sigma}$. On pourrai procéder de façon naïve, sans utiliser l'invariance par $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$: en reprenant les notations de 3.2.1, on fixe $i_0 \in I$, on met sur $\mathscr{G}_{i_0,\sigma}$ la forme hermitienne h_σ et on la transporte sur les autres $\mathscr{G}_i$ grâce au morphismes $\rho(\varphi_{i_0 i})$. Le problème est que cette construction dépend des choix des bases α_i et de i_0.

Remarque 3.3.2. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur V. Si on fixe $H \in \mathscr{H}(V)$ alors on a un isomorphisme $\varepsilon_H : \mathscr{H}(V) \simeq \mathrm{GL}(V)/\mathrm{U}(H)$ dépendant du choix de H.

Soient (V, H) et (V', H') deux espaces hermitiens et $\rho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V')$ un morphisme de groupes. En plus, supposons que H' soit $\mathrm{U}(H)$-invariant, i.e. $\rho(\mathrm{U}(H)) \subset \mathrm{U}(H')$. Le morphisme ρ induit donc un morphisme $\rho : \mathrm{GL}(V)/\mathrm{U}(H) \to \mathrm{GL}(W)/\mathrm{U}(H')$ d'espaces homogènes. On peut alors définir un morphisme $\eta^\rho_{H,H'}$: $\mathscr{H}(V) \to \mathscr{H}(V')$ par $\eta^\rho_{H,H'} := \varepsilon^{-1}_{H'} \circ \rho \circ \varepsilon_H$.

Si (V, H) est un espace hermitien de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Le choix d'une base ortonormale de V donne un isomorphisme $\mathscr{H}(V) \simeq \mathscr{H}(\mathbf{C}^n)$ où $n = \dim_{\mathbf{C}} V$.

Construction 3.3.3. Soient $\overline{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}, H_{\mathscr{F}})$ un fibré vectoriel hermitien, $\overline{\rho} = (\rho, \overline{\mathscr{F}})$ une représentation linéaire algébrique compactifiée et $\overline{\mathscr{E}} = (\mathscr{E}, H_{\mathscr{E}})$ un fibré vectoriel hermitien sur S de rang n. On va construire un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{E}}_\rho$ de rang n dont faisceau de support est $\mathscr{E}_\rho$: il s'agit donc de définir la structure hermitienne. En reprenant les notations de 3.2.1, $\mathscr{E}$ se trivialise sur S_i par des isomorphismes α_i et avec morphismes de transition φ_{ij}. Ils induit des isomorphismes $\alpha_{i\rho} : \mathscr{G}_i = \mathscr{F}|_{S_i} \to \mathscr{E}_\rho|_{S_i}$ et morphismes de transition $\rho(\varphi_{ij}) : \mathscr{G}_i|_{S_{ij}} \to \mathscr{G}_j|_{S_{ij}}$. Si $\sigma \in \Sigma$, alors $(\alpha_i)_\sigma : \mathbf{C}^n \to \mathscr{E}_\sigma$ et $(\varphi_{ij})_\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Pour définir une forme hermitienne sur $\mathscr{E}_{\rho,\sigma}$ il s'agit de donner une forme hermitienne sur $\mathscr{G}_{i,\sigma}$ pour chaque i, compatible avec les morphismes de transition, i.e. les $\rho(\varphi_{ij})$ deviennent des isomorphismes d'espaces hermitiens. Soit $\vartheta : \mathbf{C}^n \to \mathscr{E}_\sigma$ l'isomorphisme induit par le choix d'une base de $\mathscr{E}_\sigma$ ortonormale par g_σ. Si on pose $\omega_i \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ comme le morphisme tel que $\vartheta = \alpha_i \circ \omega_i$, alors $\omega_i = \omega_j \circ (\varphi_{ij})_\sigma$. Maintenant, comme $H_{\mathscr{F},\sigma}$ est $\mathrm{U}(n, \mathbf{C})$-invariante, par le remarque ci-dessus, on peut construire $\eta = \eta^\rho_{H_{\mathrm{can}}, H_{\mathscr{F},\sigma}} : \mathscr{H}(\mathbf{C}^n) \to \mathscr{H}(\mathscr{F}_\sigma)$, où H_{can} est la forme hermitienne canonique sur $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire celle qui a par base ortonormale la base standard $e_1, \ldots, e_n$. On définit donc sur $\mathscr{G}_{i,\sigma}$ la forme hermitienne $H_{\mathscr{G}_{i},\sigma} := \eta(\omega_i)$. Comme $\omega_i = \omega_i \circ (\varphi_{ij})_\sigma$, les $H_{\mathscr{G}_i,\sigma}$ sont compatible aux morphismes de transition et elles définissent une forme hermitienne $H_{\mathscr{E}_\rho,\sigma}$ sur $\mathscr{E}_{\rho,\sigma}$.

Comme $H_{\mathscr{F},\sigma}$ est $\mathrm{U}(n, \mathbf{C})$-invariante, $H_{\mathscr{E}_\rho,\sigma}$ ne depend pas de la base ortonormale ϑ. On vérifie aussi que cette construction ne depend pas des trivialisations α_i choisies.

3.3.2 Le théorème dans le cas arithmétique

Théorème 3.3.4. *Soient $\overline{\rho} = (\rho : \mathbf{GL}(n, S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F}), \overline{\mathscr{F}})$ une représentation linéaire algébrique compactifiée homogène de degré a et $\overline{\mathscr{E}}$ un fibré vectoriel hermitien de rang n sur S. Soit $P \in \mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho)(S)$ telle que sa restriction au point générique ξ soit semi-stable par l'action de $\mathbf{SL}(n, K)$. Alors il existe une constant C qui dépend seulement de $\overline{\rho}$ telle que*

$$h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho), \overline{\mathscr{O}(1)}}(P) \geq \frac{a}{[K : \mathbf{Q}]} \cdot \frac{\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}})}{\mathrm{rk}(\mathscr{E})} + C.$$

Démonstration. Soit $f_1, \dots, f_N$ un ensemble de générateurs de $\mathrm{Sym}_K(\mathscr{F}_\xi)^{\mathbf{SL}(n,K)}$. On peut supposer qui ils soient homogènes et, à moins de éliminer les dénominateurs, qu'ils appartiennent à $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}_K}(\mathscr{F}(S))$. Notons que pouvoir éliminer les denominateurs est en fait l'argument qui nous permet de faire pas l'hypothèse, dans le cas géométrique, que ρ soit induite par une représentation sur k. On pose

$$\|f_i\|_\sigma := \sup_{x \in \mathbf{V}(\mathscr{F})_\sigma(\mathbf{C})} \frac{|f_i(x)|_\sigma}{|x|_\sigma^{\deg(f_i)}} \qquad \text{et} \qquad c_\sigma := \max_{i=1,\dots,N} \|f_i\|_\sigma^{\frac{1}{\deg(f_i)}},$$

où on considère les f_i comme éléments de $\mathrm{Sym}_K(\mathscr{F}_\xi) \otimes_K \mathbf{C}$ (à travers $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$). Le point P correspond à une surjection de $\mathscr{O}_S$-modules $\mathscr{E}_\rho \to \mathscr{L} \to 0$, où $\mathscr{L} := P^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho)}(1)$. Ce dernier a une structure hermitien canonique, i.e. celle induite par $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho)}(1)$: elle est la même de la metrique quotient induite par la surjection $\mathscr{E} \to \mathscr{L}$. On désigne par $\overline{\mathscr{L}}$ le faisceau inversible $\mathscr{L}$ muni de cette metrique. En dualisant et en tensorisant par $\overline{\mathscr{L}}$, on obtient la suite exacte de fibrés hermitiens sur S suivante

$$0 \to \overline{\mathscr{O}}_S \xrightarrow{\varphi} \check{\overline{\mathscr{E}}}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_S} \overline{\mathscr{L}},$$

où $\overline{\mathscr{O}}_S$ désigne le fibré vectoriel $(\mathscr{O}_S, |1|_\sigma = 1)$. Le point P correspond, donc, à la section $s = \varphi(1) \in \Gamma(S, \check{\mathscr{E}}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L})$ qui, pour l'isometrie ci-dessus, est de norme 1 pour tout σ. Comme P est semi-stable par l'action de $\mathbf{SL}(n, K)$, un des f_i, disons f, est tel que $f_i(s_\xi) \neq 0$. Par 3.2.11, $f(s)$ est une section non nulle de $\det(\mathscr{E})^{\otimes -\frac{ad}{n}} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}$, où $d = \deg f$. Puisque $|s|_\sigma = 1$ pour tout σ, $|f(s)|_\sigma \leq c_\sigma^d$ et on peut, finalement, conclure en calculant $h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho), \overline{\mathscr{O}(1)}}(P) := \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}})$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}) - a \cdot \frac{\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}})}{\mathrm{rk}\, \mathscr{E}} &= \frac{\widehat{\deg}\left(\det(\overline{\mathscr{E}})^{\otimes -\frac{ad}{n}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \overline{\mathscr{L}}^{\otimes d}\right)}{d} \\
&= \frac{1}{d} \log \# \left(\frac{\det(\overline{\mathscr{E}})^{\otimes -\frac{ad}{n}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \overline{\mathscr{L}}^{\otimes d}}{f(s)\mathscr{O}_S} \right) - \frac{1}{d} \sum_{\sigma \in \Sigma} \log |f(s)|_\sigma \\
&\geq -\frac{1}{d} \sum_{\sigma \in \Sigma} \log |f(s)|_\sigma \geq - \sum_{\sigma \in \Sigma} \log c_\sigma.
\end{aligned}$$

En posant $C := -\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \in \Sigma} \log c_\sigma$ on obtient le résultat. □

Remarque 3.3.5. Analoguement au cas géométrique, ce théorème généralise le Theorem I dans [Bos94]. Comme on a fait pour le cas géométrique, à un cycle effectif $Z \subset \mathbf{P}(\mathscr{E})$ on associe sa forme de Chow $\Phi_Z \in \Gamma(S, F_{d,\delta}(\check{\mathscr{E}}) \otimes \mathscr{L})$. La Proposition 1.3 dans le même article dit que si on met sur $\mathscr{L}$ la structure hermitienne qu'on a mis dans la preuve, alors

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}) = h_{\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}}(Z) + [K : \mathbf{Q}]\delta\varepsilon(Z),$$

où $h_{\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}}(Z) := \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)})^d \mid Z)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1) := \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$ et $|\varepsilon(Z)| \leq \frac{d}{2} \log n$. Alors 3.3.4 affirme que

$$h_{\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}}(Z) \geq \frac{d\delta}{[K : \mathbf{Q}]} \cdot \frac{\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{E}})}{\mathrm{rk}(\mathscr{E})} + (C - [K : \mathbf{Q}]\delta\varepsilon(Z))$$

car, comme avant, $F_{d,\delta}(\overline{\mathscr{E}})$ est une représentation linéaire algébrique compactifiée homogène de degré $d\delta$. Le changement de signe est encore dû à la convention sur la définition de $\mathbf{P}(\mathscr{E})$.

Comme on a fait dans le cadre géométrique, on peut reformuler 3.3.4 de la façon suivante :

Corollaire 3.3.6. *Avec les mêmes notations de 3.3.4, supposons que $P \in \mathbf{P}_K^{r-1}(\overline{K})$ soit semi-stable par l'action de $\mathbf{SL}(n, \overline{K})$ induite par $\overline{\rho}$. Alors il existe une constant C dépéndant seulement de $\overline{\rho}$ telle que pour tout fibré vectoriel $\overline{\mathscr{E}}$ de rang n on a*

$$h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho),\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)}}(P) \geq \frac{a}{[K : \mathbf{Q}]} \cdot \frac{\widehat{\deg}\,\overline{\mathscr{E}}}{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}} + C.$$

3.3.3 Une réciproque dans le cas arithmétique

Dans le cas arithmétique on a aussi une réciproque au 3.3.4 :

Théorème 3.3.7. *Soit $\overline{\rho} = (\rho : \mathbf{GL}(n, S) \to \mathbf{GL}(\mathscr{F}), \overline{\mathscr{F}})$ une représentation linéaire algébrique compactifiée homogène de degré a, où $\overline{\mathscr{F}}$ est un fibré hermitien de rang r. Soit P un K-point de $\mathbf{P}_K^r$ qui ne soit pas semi-stable par l'action de $\mathbf{SL}(n, K)$. Alors il existe une extension finie L de K telle que*

$$\inf_{\substack{\overline{\mathscr{E}} \text{ fibré} \\ \text{hermitien sur } \mathfrak{o}_L}} h_{\mathbf{P}(\mathscr{E}_\rho),\overline{\mathscr{O}(1)}}(P) = -\infty$$

Remarque 3.3.8. En effet, ce de qu'on a besoin dans la preuve est que L a au moin un plongement complexe, car a priori il n'y a pas des sous-groupes déstablisants $\mathbf{R}$-rationnels. Si K a déjà un plongement complexe on peut prendre $K = L$, autrement il faut faire une extension de degré 2. Cependant il y a un théorème de Kempf [Kem78] qui dans cette situation affirme qu'il existe un sous-groupe déstablisant K-rationnel et, en l'utilisant, on n'est pas obligé à prendre une extension de K.

De toute façon, on prouve l'énoncé qu'on a donné pour utiliser seulement les outils qu'on possède.

Supposons que $X \hookrightarrow \mathbf{P}^r_{\mathbf{C}}$ soit une varieté projective sur $\mathbf{C}$ et H soit une forme hermitienne sur $\mathbf{C}^{r+1}$.

Proposition 3.3.9. *Soit x un point fermé de X, alors, avec les notations de 1.1.29, x est semi-stable si et seulement si*

$$\inf_{g \in G(\mathbf{C})} \|g \cdot \widehat{x}\|_H \neq 0$$

pour un (et donc pour tous) point $\widehat{x}$ au-dessus de x.

Démonstration. D'après la proposition 1.1.34, il faut juste comparer la topologie de Zariski et analytique sur $\widehat{X}(\mathbf{C})$. La topologie analytique est celle induite par H (qu'on peut supposer la métrique standard) par l'inclusion $\widehat{X}(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathbf{A}^{r+1}(\mathbf{C})$. Or, notons que les adhérences de $G \cdot \widehat{x}$ par rapport respectivement à la topologie de Zariski et à la topologie analytique coïncident, car l'orbite $G \cdot \widehat{x}$ est Zariski-ouverte dans son adhérence (rappelons que les fermés de Zariski avec intérieure vide par la topologie de Zariski ont intérieure vide aussi par la topologie analytique). En conclusion, 0 appartient à l'adhérence de $G \cdot \widehat{x}$ si et seulement si

$$\inf_{g \in G(\mathbf{C})} \|g \cdot \widehat{x}\|_H = 0. \qquad \square$$

De consequence, x est semi-stable si et seulement, au varier de g en $G(\mathbf{C})$, la fonction $\log \|g \cdot \widehat{x}\|_H$ est borné inférieurement. Autrement dit, si on définit pour $g \in G(\mathbf{C})$ la forme hermitienne $H_g := H(g \cdot -, g \cdot -)$, x est semi-stable si et seulement si

$$\log \frac{\|\widehat{x}\|_{H_g}}{\|\widehat{x}\|_H} = \log \frac{\|g \cdot \widehat{x}\|_H}{\|\widehat{x}\|_H}$$

est bornée inferieurement au varier de g en $G(\mathbf{C})$. En plus, cette fonction, en étant indépendant du représentant $\widehat{x}$ choisi, définit une fonction continue μ : $G(\mathbf{C}) \times X(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ et x est donc semi-stable si et seulement si $\mu(-, x)$ est bornée inférieurement. La preuve de 3.3.7 devient or triviale :

Démonstration de 3.3.7. Soit $\overline{\mathscr{E}} = (\mathscr{E}, \{H_\sigma\})$ un fibré hermitien quelconque : on pose, analoguement à ci-dessus, $\overline{\mathscr{E}}_g = (\mathscr{E}, \{H_{g_\sigma}\})$ avec $g_\sigma \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ tel que $g_{\overline{\sigma}} = \overline{g_\sigma}$. C'est facile à vérifier que si $\{H_{\rho,\sigma}\}_\sigma$ sont les formes hermitiennes associées à $\overline{\mathscr{E}}_\rho$, alors $\{H_{\rho,\sigma}(g \cdot -, g \cdot -)\}$ sont celles associées à $(\overline{\mathscr{E}}_g)_\rho$. On prend une extension finie L de K avec au moin un plongement complex $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ et on pose $g_\sigma = \mathrm{id}$ pour $\sigma \neq \tau, \overline{\tau}$ et $g_{\overline{\tau}} = \overline{g_\tau}$. Maintenant $\mu(g_\tau, \tau(x)) = \mu(g_{\overline{\tau}}, \overline{\tau}(x))$ pour tout $g_\tau \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ et, puisque

$$h_{\overline{\mathscr{E}}_g}(x) = h_{\overline{\mathscr{E}}}(x) + \frac{2}{[L : \mathbf{Q}]} \mu(g_\tau, x),$$

on peut conclure par la proposition précédente. □

Chapitre 4

Une exemple

4.1 L'inégalité de Liouville

Le point de départ de l'approximation diophantienne est probablement l'énoncé suivant dû a Liouville :

Théorème 4.1.1. *Soit α un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$, alors il existe une constant C dependant seulement de α (et ses conjugués) telle que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}$$

pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, p et q premiers entre eux.

La preuve est vraiment simple : soit f un polynôme irreductible à coefficients en $\mathbf{Z}$ tel que $f(\alpha) = 0$. Étant irreductible, il est un multiple du polynôme minimal et donc $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. En particulier $q^d f(p/q)$ est un entier non nul et donc

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

D'autre coté, on peut supposer $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq 1$ et en developpant en serie de Taylor autour α, on obtient

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{d} f^{(i)}(\alpha)\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)^i\right| \leq \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| C^{-1}$$

où $C^{-1} = \sum_{i=1}^{d} |f^{(i)}(\alpha)|$.

4.1.1 Une preuve nouvelle

On va voir comme on peut déduire un énoncé analogue à l'inégalité de Liouville en utilisant la bornée des hauteurs qu'on a prouvée.

Remarque 4.1.2. Soit H_0 la métrique hermitienne standard sur $\mathbf{C}^2$, c'est-à-dire celle qui a comme base ortonormale $e_1 = \binom{1}{0}$ et $e_2 = \binom{0}{1}$. On définit une métrique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la façon suivante : si $x, y \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $\widehat{x}, \widehat{y}$ sont des représentants, alors on pose

$$d_{\mathbf{P}^1}(x,y) := \frac{\|\widehat{x} \wedge \widehat{y}\|_0}{\|\widehat{x}\|_0 \|\widehat{y}\|_0},$$

où

$$\|\widehat{x} \wedge \widehat{y}\|_0^2 = \det \begin{pmatrix} H_0(\widehat{x},\widehat{x}) & H_0(\widehat{x},\widehat{y}) \\ H_0(\widehat{y},\widehat{x}) & H_0(\widehat{y},\widehat{y}) \end{pmatrix} = \left| \det \begin{pmatrix} \widehat{x}_0 & \widehat{y}_0 \\ \widehat{x}_1 & \widehat{y}_1 \end{pmatrix} \right|^2.$$

Clairement la métrique $d_{\mathbf{P}^1}$ ne dépend pas du choix des représentants $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$. Il suit directement de la définition que

$$0 \leq d_{\mathbf{P}^1}(x,y) \leq 1$$

pour tout $x, y \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Si $\xi, \eta \in \mathbf{C}$, on écrira $d_{\mathbf{P}^1}(\xi,\eta)$ plutôt de

$$d_{\mathbf{P}^1}((1:\xi),(1:\eta)) = \frac{|\xi - \eta|}{(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)}.$$

Soient α un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$, f le polynôme minimal de α, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_d$ les racines de f dans une fixée clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ le racines de f en $\mathbf{C}$ avec $\alpha_1 = \alpha$. L'énonce qu'on va prouver est le suivant :

Théorème 4.1.3. *Avec les notations ci-dessus, il existe une constant C dependant seulement de α (et ses conjugués) telle que*

$$\log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) \geq C - d h_0(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, où h_0 est la hauteur sur $\mathbf{P}^1$ associée à la métrique hermitienne standard.

Remarque 4.1.4. Si on prend $x = (1 : p/q)$ avec $p/q \in \mathbf{Q}$, on a

$$d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) = \frac{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|}{\|(1, p/q)\|_0 \|(1,\alpha)\|_0}$$

et si p/q est assez proche à α (qui est le cas intéressant), alors $\|(1,p/q)\|_0$ est proche de $\|(1,\alpha)\|_0$. On obtient, donc, qu'il existe un constant C' dépendant seulement de α et ses conjugués telle que

$$\log\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq C'-dh_0(1:p/q),$$

qui montre l'analogie avec l'inégalité de Liouville.

En plus, si on prefère, le théorème peut être énoncé avec la hauteur de Weil – c'est à dire $h_{\mathrm{Weil}}(1:p/q)=\max\{|p|,|q|\}$ si p et q sont des entiers premiers entre eux – car la différence entre h_0 et h_{Weil} est bornée indépendantement de α et p/q.

On passe à la démonstration de l'inégalité. Considérons dans $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ le cycle $Z=\sum_{i=1}^d\binom{1}{\vartheta_i}+dx$: ce cycle est de degré $2d$ et on peut le voir comme un point de $\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^{2d}(\mathbf{Q}^2))$ en lui associant le polynôme homogène

$$t_0^{2d}f\left(\frac{t_1}{t_0}\right)(x_1t_0-x_0t_1)^d,$$

où $x=(x_0:x_1)$ avec $x_0,x_1\in\mathbf{Q}$. Dans la suite on prendera toujours $\widehat{x}=(x_0,x_1)$ comme représentant de x. Comme tous points sont répétés au plus $d=\frac{\deg Z}{2}$, alors, d'après 1.1.37, Z est semistable par l'action de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{V}(\mathrm{Sym}^{2d}(\mathbf{Q}^2))$, induite par la représentation $\rho:\mathbf{GL}(2,\mathbf{Z})\to\mathbf{GL}(\mathrm{Sym}^{2d}(\mathbf{Z}^2))$. Maintenant on pose $\mathscr{E}:=\mathbf{Z}^2$: dans la suite toutefois qu'on aura une métrique sur $\mathscr{E}$, sur $\mathrm{Sym}^{2d}(\mathbf{Z}^2)$ on considéra la métrique canonique induite, i.e. la métrique quotient par la surjection canonique $(\mathbf{Z}^2)^{\otimes 2d}\to\mathrm{Sym}^{2d}(\mathbf{Z}^2)$ (qui rend ρ une représentation compactifiée).

Pour $i=0,1$, désignons par $\overline{\mathscr{E}}_i$ le fibré hermitien $(\mathscr{E},H_i)$, où H_0 est la métrique standard sur $\mathbf{C}^2$ et H_1 est la métrique de matrice

$$\begin{pmatrix}\frac{\alpha^2}{\|(1,\alpha)\|_0^2}+\frac{x_1^2}{\|\widehat{x}\|_0^2} & -\left(\frac{\alpha}{\|(1,\alpha)\|_0^2}+\frac{x_0x_1}{\|\widehat{x}\|_0^2}\right)\\ -\left(\frac{\alpha}{\|(1,\alpha)\|_0^2}+\frac{x_0x_1}{\|\widehat{x}\|_0^2}\right) & \frac{1}{\|(1,\alpha)\|_0^2}+\frac{x_0^2}{\|\widehat{x}\|_0^2}\end{pmatrix}.$$

En termes de norme, si $v=(v_0,v_1)$ est un vecteur de $\mathbf{C}^2$, alors

$$\|v\|_1^2=\frac{\|(1,\alpha)\wedge v\|_0^2}{\|(1,\alpha)\|_0^2}+\frac{\|\widehat{x}\wedge v\|_0^2}{\|\widehat{x}\|_0^2}$$

Dans la suite on désignera par h_i la hauteur associée à $\overline{\mathscr{E}}_i$, pour $i=0,1$. En calculant le déterminant de la matrice par laquelle est définie, on a que H_1 est une métrique de covolume $d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x)^2$. En appliquant 3.3.4, on obtient qu'il existe une constant C (indépendante de la métrique choisie) telle que

$$h_1(Z) \geq d \log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) + C.$$

D'autre coté on a

$$h_1(Z) \leq \sum_{i=1}^{d} h_1(1 : \vartheta_i) + d h_1(x),$$

parce que si g, g' sont deux polynômes homogènes, alors $\|g \cdot g'\|_1 \leq \|g\|_1 \|g'\|_1$. Notons aussi que, étant $\overline{\mathscr{E}}_i$ un fibré hermitien défini sur $\mathbf{Z}$, alors $h_1(1 : \vartheta_i) = h_1(1 : \vartheta_j)$ pour tout i, j, car ils sont conjugués. Enfin,

$$\sum_{i=1}^{d} h_1(1 : \vartheta_i) + d h_1(x) = d\Big[h_1(1 : \vartheta) + h_1(x)\Big],$$

en posant, par exemple, $\vartheta = \vartheta_1$. En plus, si K est un corps de nombres et $y \in \mathbf{P}^1(K)$, on a que $h_1(y) = h_0(y) + \varphi(y)$ avec

$$\varphi(y) = \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \frac{\|\sigma(\widehat{y})\|_1}{\|\sigma(\widehat{y})\|_0},$$

où $\widehat{y}$ est un représentant de y. On a obtenu

$$d\Big[h_0(x) + h_0(1 : \vartheta) + \varphi(x) + \varphi(1 : \vartheta)\Big] \geq d \log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) + C \tag{4.1}$$

On calcul la fonction φ :

$$\varphi(1 : \vartheta) = \frac{1}{d} \log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) + \frac{1}{2d} \sum_{i=2}^{d} \log \left[d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, \alpha_i)^2 + d_{\mathbf{P}^1}(x, \alpha_i)^2\right]$$

$$\varphi(x) = \log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x)$$

Donc

$$d\Big[\varphi(x) + \varphi(1 : \vartheta)\Big] = (d+1) \log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{d} \log \left[d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, \alpha_i)^2 + d_{\mathbf{P}^1}(x, \alpha_i)^2\right].$$

Notons que

$$\sum_{i=2}^{d} \log \left[d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, \alpha_i)^2 + d_{\mathbf{P}^1}(x, \alpha_i)^2\right] \leq (d-1) \log 2$$

et donc (4.1), par cette majoration et en changeant la constant C, devient

$$\log d_{\mathbf{P}^1}(\alpha, x) + d h_0(x) + d h_0(1 : \vartheta) \geq C'.$$

On termine en notant que $h_0(1 : \vartheta)$ est une constante dépendante seulement de α et ses conjugués.

Annexe A

Les critères valuatifs de séparation et propreté

A.1 Lemmes préparatoires

Soient k un corps, $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur k et $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X. Si $f(X_i)$ est de dimension 0 pour tout i, alors $f(X)$ est fermé. Donc si y est un point fermé appartenant à l'adhérence de $f(X)$ et s'il existe i tel que $y \in \overline{f(X_i)}$ et $f(X_i)$ est de dimension 0, alors $y \in f(X)$.

Lemme A.1.1. *Soient k un corps, $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur k. Soit y un point fermé de Y appartenant à $\overline{f(X)}$ et supposons que si $y \in \overline{f(X_i)}$ alors $\dim f(X_i) \geq 1$. Alors il existe un point $\eta \in f(X)$ tel que $\operatorname{degtr}_k k(\eta) = 1$ et $y \in \overline{\{\eta\}}$.*

En remplaçant Y par $\overline{f(X)}$, on peut supposer que f soit dominant. Comme il existe i tel que $y \in \overline{f(X_i)}$, on peut aussi supposer que X (et donc Y) soit irréductible, de dimension supérieure ou égale à 1. En plus, étant $f(X)$ une partie constructible et dense en Y, il existe un ouvert V de Y qui est contenu dans $f(X)$. On se ramène donc à l'énoncé suivant :

Lemme A.1.2. *Soit X un schéma irréductible de type fini sur un corps k, de dimension supérieure ou égale à 1. Si U est un ouvert de X et $x \in X$, il existe un* *point* $\xi \in U$ *tel que* $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$ *et* $x \in \overline{\{\xi\}}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension d de X. Soient $\dim X = 1$ et ξ le point générique de X : $\xi \in U$ et $x \in \overline{\{\xi\}}$ car $\{\xi\}$ est dense en X. En plus $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$ car $\dim X = 1$.

Supposons, donc, $d > 1$ et que l'énoncé soit vrai en dimension $d-1$: on va le prouver en dimension d. J'affirme qu'il existe un point η de codimension 1 tel que $\eta \in U$ et $x \in \overline{\{\eta\}}$: comme le complémentaire $F = X - U$ de U est fermé, il n'y en a qu'un nombre fini de points de codimension 1 appartenant à F et il y a un nombre infini de point de codimension 1 contenants x [cf. remarque ci-dessous]. On applique, finalement, l'hypothèse de récurrence à $\overline{\{\eta\}}$ qui est de dimension $d-1$. □

Remarque A.1.3. Soit X comme dans les hypothèses du lemme et dimension $d \geq 2$: on veut montrer que si x est un point fermé de X, alors il y a une infinité de points de codimension 1 qui se spécialisent à x.

Commençons par montrer que si on a un morphisme fini et dominant $f : X \to Y$ et Y a cette propriété alors aussi X l'a. En fait si $y = f(x)$ et η est un point de codimension 1 tel que $y \in \overline{\{\eta\}}$, alors tout $\xi \in f^{-1}(\eta)$ (la fibre en η n'est pas vide car f est surjectif) sont de codimension 1 dans X par le théorème de Cohen-Seidenberg. Clairement, en prenant un voisinage affine de x, on peut suppose que X soit affine. Alors, par le théorème de normalisation de Noether, on a un morphisme fini dominant $X \to \mathbf{A}^d_k$, où d est la dimension de X : on est donc ramené à le montrer pour l'espace affine $\mathbf{A}^d_k$, avec $d \geq 2$.

Si le corps k est algébriquement clos, c'est clair en prenant les hyperplanes passants par x (qui sont un nombre infini car k est infini). Si k n'est pas algébriquement clos il faut noter que $\pi : \mathbf{A}^d_{\overline{k}} \to \mathbf{A}^d_k$ envoie points de codimension 1 en points de codimension 1 et π est un morphisme à fibres finies.

Lemme A.1.4. *Soient* k *un corps,* $f : X \to Y$ *un morphisme entre schémas de type fini sur* k *et* $X_1, \ldots, X_n$ *le composantes irréductibles de* X. *Soit* y *un point fermé de* Y *appartenant à l'adhérence de* $f(X)$ *et telle que si* $y \in \overline{f(X_i)}$ *alors* $\dim f(X_i) \geq 1$. *Alors il existe un point* $\xi \in X$ *tel que* $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$, $\operatorname{degtr}_k k(\varphi(\xi)) = 1$ *et* $y \in \overline{\{\varphi(\xi)\}}$.

Démonstration. D'après A.1.1, il existe un point $\eta \in f(X)$ tel que $\operatorname{degtr}_k k(\eta) = 1$ et $y \in \overline{\{\eta\}}$. La fibre $X_\eta = X \times_Y \operatorname{Spec} k(\eta)$ est un schéma de type fini sur $k(\eta)$. Puisque X_η n'est pas vide, il existe un point fermé ξ : par le Nullstellensatz le corps résiduel $k(\xi)$ est une extension algébrique finie de $k(\eta)$ et, donc, $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$. □

Lemme A.1.5 ([Har77, Lemma 4.4])**.** *Soit A un anneau de valuation de corps de fractions K. Se donner un morphisme de* Spec A *vers X est équivalent à se donner deux point x, y de X, avec $x \in \overline{\{y\}}$ et une inclusion $k(y) \hookrightarrow K$ telle que A domine l'anneau local de x dans le sous-schéma $Z = \overline{\{y\}}$ avec sa structure réduite.*

A.2 Le critère valuatif de séparation

Théorème A.2.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur un corps k. Alors f est séparé si et seulement si pour tout extension finie k' de k et diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

où $A = k'[[t]]$ et $K = k'((t))$, il existe au plus un morphisme $\operatorname{Spec} A \to X$ *qui fait commuter le diagramme.*

Une implication est donnée par la version générale du critère [Har77, Theorem 4.3], donc on va montrer l'autre direction.

Démonstration. On doit montrer que l'image de X par la diagonale $\Delta : X \to X \times_Y X$ est fermée. Comme $X \times_Y X$ est encore un schéma de type fini sur k, il faut seulement montrer que

$$\overline{\Delta(X)} \cap (X \times_Y X)_{\max} = \Delta(X) \cap (X \times_Y X)_{\max},$$

où $(X \times_Y X)_{\max}$ désigne les points fermés de $X \times_Y X$. Soit donc x un point fermé de $\overline{\Delta(X)}$: si y ne satisfait pas les hypothèses de A.1.1 alors $y \in \Delta(X)$. On peut supposer que y satisfait les hypothèses de A.1.1 et, donc, par ce lemme, il existe $\xi \in \Delta(X)$ tel que $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$ et $x \in \overline{\{\xi\}}$. Considérons le sous-schéma $Z = \overline{\{\xi\}}$ avec sa structure réduite : comme $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$, Z est une courbe. Si on prend la normalisation $\widetilde{Z}$ de Z en $K = k(\xi)$ et $\widetilde{x}$ un point au-dessus de x, on a que $A = \mathscr{O}_{\widetilde{Z},\widetilde{x}} \subset K$ est un anneau de valuation discrète qui domine $\mathscr{O}_{Z,x}$. Si on passe à la complétion $\widehat{A}$ de A (resp. $\widehat{K}$ de K) par la valuation de A, on a que $\widehat{A}$ domine $\mathscr{O}_{Z,x}$ en $\widehat{K}$ (vu comme sous-anneau de $\widehat{K}$ par le morphisme $\mathscr{O}_{Z,y} \hookrightarrow A \hookrightarrow \widehat{A}$). Maintenant, par le théorème de structure de Cohen des anneaux locaux complétés [Eis99, Theorem 7.7], on obtient qu'il existe une extension finie k' de k et $t \in A$ tels que $\widehat{A} \simeq k'[\![t]\!]$ et $\widehat{K} \simeq k'(\!(t)\!)$. Par le lemme A.1.5 on a un morphisme $\operatorname{Spec} \widehat{A} \to X \times_Y X$ qui envoie le point fermé en x et le point générique en ξ. En composant avec le projections p, q, on obtient deux morphismes de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ vers X, qui donnent le même morphisme vers Y et dont restriction au point générique $\operatorname{Spec} \widehat{K}$ sont la même, car $\xi \in \Delta(X)$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \widehat{K} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} \widehat{A} \arrow[r] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & Y
\end{tikzcd}$$

Par la condition dans l'énoncé les deux morphismes de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ vers X doivent être le même. Donc, le morphisme $\operatorname{Spec} \widehat{A} \to X \times_Y X$ doit se factoriser à travers la diagonale et $x \in \Delta(X)$, comme on voulait montrer. $\square$

A.3 Le critère valuatif de propreté

Théorème A.3.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur un corps k. Alors f est propre si et seulement si pour tout extension finie k' de k et diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} A \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

où $A = k'[\![t]\!]$ et $K = k'(\!(t)\!)$, il existe un unique morphisme $\operatorname{Spec} A \to X$ qui fait commuter le diagramme.

Une implication est donnée par la version générale du critère [Har77, Theorem 4.6], donc on va montrer l'autre direction. On va utiliser le lemme suivant pour se ramener à prouver que f est universellement fermé seulement par changement de base $Y' \to Y$ de type fini.

Lemme A.3.2 ([EGA II, Corollaire 5.6.2])**.** *Soient Y un schéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme séparé et de type fini. Pour que f soit propre, il faut et il suffit que pour tout changement de base de type fini $Y' \to Y$, le morphisme $f' : X' := X \times_Y Y' \to Y'$, obtenu par changement de base, soit fermé.*

Démonstration. Pour montrer que f est propre, on doit seulement montrer que f est universellement fermé, car f est de type fini par hypothèse et séparé par A.2.1. Soient, d'après A.3.2, $Y' \to Y$ un morphisme de type fini et $f' : X' := X \times_Y Y' \to Y'$ le morphisme obtenu par changement de base. Soit F une partie fermée de X' avec sa structure réduite. On doit montrer que $f'(F)$ est fermé dans Y'. Notons que f' est encore un morphisme entre schémas de type fini sur k et donc aussi la restriction de f' à F l'est. Donc on est ramené à montrer que

$$\overline{f'(F)} \cap Y_{\max} = f'(F) \cap Y_{\max},$$

où $Y_{\max}$ désigne l'ensemble des points fermés de Y. Soit, donc, $y \in \overline{f'(F)}$ un point fermé : si y ne satisfait pas les hypothèse de A.1.4, alors $y \in f'(F)$; autrement, par ce lemme, il existe $\xi \in F$ tel que $y \in \overline{\{\xi\}}$ et $\operatorname{degtr}_k k(\xi) = 1$. Soit $Z = \overline{\{\varphi(\xi)\}}$ avec sa structure réduite, $\widetilde{Z}$ sa normalisation en $K = k(\xi)$ et $\widetilde{y}$ un point au-dessus de y : l'anneau local $A = \mathscr{O}_{\widetilde{Z},\widetilde{y}}$ est de valuation discrète et il domine $\mathscr{O}_{Z,y}$ dans K. En passant à la complétion par la valuation de A, on obtient que $\widehat{A}$ domine $\mathscr{O}_{Z,y}$ dans $\widehat{K}$. Par le lemme A.1.5 on a un morphisme de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ vers X, qui envoie le point générique en $\varphi(\xi)$ et le point fermé en y, et un morphisme $\operatorname{Spec} K$ vers X qui forment le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \widehat{K} \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} \widehat{A} \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

En composant avec les morphismes $Z \to X' \to X$ et $Y' \to Y$, on obtient des morphismes $\operatorname{Spec} \widehat{K} \to X$ et $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ auxquels on peut appliquer la condition dans l'énoncé car, par le théorème de structure des anneaux locaux complétés de Cohen [Eis99, Theorem 7.7], il existe une extension finie k' de k et $t \in A$ telle que $\widehat{A} \simeq k'[\![t]\!]$ et $\widehat{K} \simeq k'(\!(t)\!)$. Il y a, donc, un morphisme $\operatorname{Spec} \widehat{A} \to X$ qui fait commuter le diagramme. Comme X' est le produit fibré de X et Y', le morphisme se relève à $\operatorname{Spec} \widehat{A} \to X'$. Puisque Z est fermé et le point générique de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ est envoyé sur ξ, alors ce morphisme se factorise à travers l'immersion fermée $Z \hookrightarrow X$. Soit x l'image du point fermé de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$, alors $f'(x) = y$, comme on voulait montrer. $\square$

Bibliographie

[Bor91] A. Borel, *Linear Algebraic Groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer, 1991.

[Bos94] J.-B. Bost, *Semi-stability and heights of cycles*, Inventiones mathematicae **118** (1994), 223–253.

[CH88] M. Cornalba et J. Harris, *Divisor classes associated to families of stable varieties, with applications to the moduli space of curves*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **21** (1988), no. 3, 455–475.

[CL] A. Chambert-Loir, *Arakelov Geometry : Heights and the Bogomolov conjecture*, polycopies de cours téléchargeables à `http ://perso.univ-rennes.fr/antoine.chambert-loir/2008-09/cga/cga.pdf`.

[Dol03] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 296, Cambridge University Press, 2003.

[EGA I] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1960.

[EGA II] ———, *Éléments de géométrie algébrique : II. Étude élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1961.

[Eis99] D. Eisenbud, *Commutative Algebra : with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1999.

[FP76] E. Formanek et C. Procesi, *Mumford's conjecture for the general linear group*, Advances in Mathematics **19** (1976), 292–305.

[Gas00] C. Gasbarri, *Heights and Geometric Invariant Theory*, Forum Mathematicum **12** (2000), 135–153.

[GIT] D. Mumford et J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory. Second Edition.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3 Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, 1982.

[Hab75] W. J. Haboush, *Reductive groups are geometrically reductive*, Annals of Mathematics **102** (1975), 67–83.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, 1977.

[HS00] M. Hindry et J. H. Silverman, *Diophantine geometry : an introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer, 2000.

[Kem78] G. Kempf, *Instability in invariant theory*, Annals of Mathematics **299** (1978), no. 108, 299–316.

[MS72] D. Mumford et K. Suominen, *Introduction to the theory of moduli*, Proceedings of the fifth Nordic Summer School in Mathematics, Oslo, August 5-25 1970 (F. Oort, ed.), Wolter-Noordhoff, 1972.

[Mum77] D. Mumford, *Stability of projective varieties*, L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. IIe Série **23** (1977), no. 1, 39–110.

[Neu99] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 322, Springer, 1999.

[New78] P. E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[Ses77] C. S. Seshadri, *Geometric Reductivity over Arbitrary Base*, Advances in Mathematics **26** (1977), 225–274.

[Szp85] L. Szpiro, *Degrés, intersections, hauteurs*, Astérisque **127** (1985), 11–28.