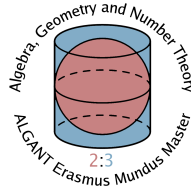




Università degli Studi di Padova



Université de Paris-Sud XI



Master Erasmus Mundus ALGANT

COURBES ANALYTIQUES NON ARCHIMÉDIENNES ET RÉDUCTION SEMI-STABLE

LORENZO FANTINI

sous la direction de
ANTOINE DUCROS
MARCO ANDREA GARUTI

Mémoire de Master 2 en Sciences Mathématiques
présenté à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
le 10 Septembre 2010

A tutti i ricercatori italiani.

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités	5
1.1 Corps ultramétriques et algèbres k -affinoïdes	5
1.2 Espaces analytiques	6
1.3 Analytifié d'une variété algébrique	9
1.4 La fibre générique d'un schéma formel	11
2 La droite projective de Berkovich	12
2.1 Les points.	12
2.2 La topologie et les chemins.	16
2.3 Droite sur un corps ultramétrique complet quelconque.	24
3 Courbes Analytiques	26
3.1 Qu'est-ce que c'est une courbe analytique	26
3.2 Types des points et genre d'un point de <i>type (2)</i>	26
3.3 Les analytifiés des courbes algébriques	28
3.4 Un exemple fondamental : la courbe de Tate	28
3.5 L'uniformisation de la courbe de Tate	29
3.6 L'homotopie de la courbe de Tate	33
4 Réduction et type d'homotopie des courbes	38
4.1 Réduction d'un espace analytique	38
4.2 Réduction semi-stable de courbes	43
4.3 Squelettes et type d'homotopie de courbes	46
4.4 Courbes à bonne réduction et courbes elliptiques	48
5 Modèles des courbes	51
5.1 Modèles et ensembles finis de point de <i>type (2)</i>	51
5.2 Caractérisation des modèles semi-stables	53
5.3 Existence d'un modèle semi-stable	54
5.4 De semi-stable à stable	55
5.5 Canonicité d'un modèle stable	58
Références	63

Introduction

Le but de ce mémoire est l'étude des courbes analytiques sur un corps non archimédien complet k . Le cadre où on travaille est celui de la géométrie de Berkovich, ou théorie des espaces k -analytiques non archimédiens. Dans cette théorie, développée par Vladimir G. Berkovich vers la fin des années '80, les espaces analytiques sont des vrais espaces topologiques avec bonnes propriétés.

Après un rappel rapide des bases de la théorie de Berkovich et après avoir donné les premiers exemples d'analytifié d'une variété algébrique, on se consacre dans le deuxième chapitre à un étude détaillé de la droite projective k -analytique. On voit comment on peut classer ses points en point de 4 types différentes et on parle de sa structure "d'arbre réel". Dans le chapitre 3 on s'occupe des courbes k -analytiques quelconques, et en particulier des analytifiés des courbes algébriques. On étudie en détail l'exemple des courbes de Tate, i.e. les analytifiés des courbes elliptiques à mauvaise réduction, sur un corps algébriquement clos, leur uniformisation et leur type d'homotopie. Là théorie de la réduction des espaces k -analytiques est l'objet d'étude du chapitre 4, où on montre comment déduire le type d'homotopie d'une courbe k -analytique en regardant une réduction semi-stable de celle-ci. Dans le dernier chapitre on montre comme on peut interpréter dans le langage de la théorie de Berkovich différentes propriétés des modèles de courbes algébriques. Cet approche, très géométrique, conduit aussi vers une démonstration du théorème de réduction semi-stable par des méthodes de géométrie de Berkovich ; on raconte les principes de la preuve dans un cas particulier. On parle aussi des problèmes liés à la canonicité des modèles stables.

1 Généralités

On donne vite les définitions de base de la construction de la théorie de Berkovich, ou des espaces k -analytiques non archimédiens.

Les références principales pour ce chapitre sont surtout le texte de fondation [Ber90] et le séminaire Bourbaki [Duc07], mais aussi [Ber93] et [Con08].

1.1 Corps ultramétriques et algèbres k -affinoïdes

Définition 1.1. Une valeur absolue $|\cdot|$ sur un corps k est dite *ultramétrique* (ou *non archimédienne*) si, pour tout a, b dans k , on a $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

Si $|a| \neq |b|$ on a alors l'égalité $|a + b| = \max\{|a|, |b|\}$. En effet, en supposant $|a| > |b|$ on a évidemment $|a + b| \leq |a|$, mais aussi $|a| = |a + b - b| \leq \max\{|a + b|, |b|\}$, d'où $\max\{|a + b|, |b|\} = |a + b| \geq |a|$ et donc $|a + b| = |a|$.

Dans la suite, on considère toujours un corps k *ultramétrique*, c'est-à-dire muni d'une valeur absolue ultramétrique.

On note k° (respectivement $k^{\circ\circ}$) l'ensemble des éléments de k de valeur absolue inférieure ou égale à 1 (resp. strictement inférieure à 1) ; k° est alors un anneau, dit *anneau de valuation* de k , d'unique idéal maximal $k^{\circ\circ}$. On appelle *corps résiduel* le corps quotient $k^\circ/k^{\circ\circ}$, et on le note \tilde{k} .

Souvent on demande aussi que le corps k soit *complet*. En fait les corps ultramétriques complets jouissent d'une bonne propriété, qu'on va utiliser fréquemment et qui est une conséquence du lemme de Hensel, à savoir que leur valeur absolue se prolonge de manière unique à toute extension algébrique, finie ou infinie.

L'exemple le plus important d'un tel corps est le corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques. Son anneau des entiers est \mathbb{Z}_p et son corps résiduel est \mathbb{F}_p .

Quand on s'intéressera à des corps également algébriquement clos, on aura comme prototype le corps \mathbb{C}_p obtenu en complétant une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p (c'est un fait général que si on part d'un corps ultramétrique et complet k , le complété d'une clôture algébrique de k reste algébriquement clos). Son corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ est une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_p}$ de \mathbb{F}_p .

Il faut remarquer que si k est algébriquement clos et sa valeur absolue n'est pas triviale, alors son anneau de valuation k° n'est jamais un anneau de valuation discrète. En effet soit $a \in k^\circ \setminus \{0\}$ avec $|a| < 1$ (vu que la valeur absolue n'est pas triviale il y a dans k un tel élément a , soit a soit a^{-1} , où $|a| \neq 0, 1$), on peut alors fabriquer un élément de k° de valuation arbitrairement petite en considérant une racine n -ème de a pour n assez grand. Par exemple, le groupe de valuation de \mathbb{C}_p° est \mathbb{Q} .

Définition 1.2. Un k -algèbre de Banach est une k -algèbre A qui est au même temps un'espace de Banach et telle que la norme de A satisfait l'inégalité ultramétrique aussi bien que l'inégalité $|ab| \leq |a||b|$ pour tout $a, b \in A$.

Définition 1.3. Si A est une k -algèbre, une *semi-norme multiplicative* sur A est une application multiplicative $A \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait l'inégalité ultramétrique et étend la valeur absolue de k .

Soit $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$; on note D le polydisque de polyrayon \underline{r} dans k^n . On note $k\{\underline{rT}\}$ ou $k\{r_1T_1, \dots, r_nT_n\}$ l'algèbre des séries formelles $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I$ telles que $|a_I| r^I$ tend vers 0 lorsque $|I|$ tend vers infini. Grâce à l'inégalité ultramétrique, il s'agit précisément des séries qui convergent en tout point de D . Munie de la norme $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I \mapsto \max_I |a_I| r^I$ elle est une algèbre de Banach. On démontre que *une telle algèbre est noethérienne et ses idéaux sont fermés*.

Définition 1.4. Une k -algèbre de Banach \mathcal{A} est dite *k -affinoïde* s'il existe un polyrayon \underline{r} et un idéal I de $k\{\underline{rT}\}$ tels que \mathcal{A} est isomorphe au quotient $k\{\underline{rT}\}/I$. L'algèbre \mathcal{A} est dite *strictement k -affinoïde* s'il existe un tel isomorphisme avec les $r_i = 1$.

1.2 Espaces analytiques

Définition 1.5. Soit \mathcal{A} une algèbre k -affinoïde. L'*espace k -affinoïde* associé à \mathcal{A} , qu'on note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur \mathcal{A} , muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^A .

L'espace topologique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est aussi appelé *spectre analytique*. On a une application évidente $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$, celle qui envoie une semi-norme x sur son noyau \mathfrak{p}_x ; on démontre que c'est une application continue et surjective. La semi-norme x induit une valeur absolue sur le corps des fractions du quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$. On note $\mathcal{H}(x)$ le complété de ce corps par cette valeur absolue, et on l'appelle *corps résiduel complété* de x . Si $f \in \mathcal{A}$ on note $f(x)$ l'image de f dans $\mathcal{H}(x)$; on peut alors écrire $|f(x)|$ à la place de $x(f)$, ce qui a évidents avantages psychologiques.

L'application de \mathcal{A} dans \mathbb{R} qui envoie f en $\sup_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(x)|$ est une semi-norme qu'on appelle *semi-norme sup* de \mathcal{A} et on note $|\bullet|_{sup}$; il faut toutefois faire attention : cette semi-norme n'est pas en général multiplicative et donc elle n'est pas en général un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Remarque 1.6. Les éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ coïncident avec les classes d'équivalence des *évaluations* de \mathcal{A} (i.e. les morphismes bornés de \mathcal{A} vers une extension complète quelconque de k), deux caractères étant équivalents s'ils se factorisent par le même caractère; la bijection est l'application qui envoie la

semi-norme x sur le caractère induit $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$. Donc on peut voir le spectre analytique $\mathcal{M}(k\{rT\}/I)$ comme l'ensemble des zéros de I à coordonnée dans une extension complète de k quelconque, pas forcément finie.

Cette construction est fonctorielle : tout morphisme d'algèbres k -affinoïdes $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ induit par composition une application continue $\mathcal{M}(\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

L'espace $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ jouit de bonnes propriétés topologiques : il est compact et localement connexe par arcs.

Si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un espace k -affinoïde et x est un point de X , on dit que x est un *point rigide* lorsque son corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie de k . L'ensemble X_0 des points rigides de X est totalement discontinu et, lorsque la valeur absolue de k est non triviale et \mathcal{A} est strictement k -affinoïde, X_0 est dense en X et isomorphe à l'espace analytique rigide (à la Tate) associé à \mathcal{A} .

On a un *produit fibré* d'espaces k -affinoïdes, dual du produit tensoriel complété d'algèbres k -affinoïdes.

Définition 1.7. Soit \mathcal{A} une algèbre k -affinoïde, et soit $V \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On dit que V est un *domaine affinoïde* de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ s'il existe une \mathcal{A} -algèbre k -affinoïde \mathcal{A}_V telle que l'image de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit V et avec la propriété universelle suivante : tout morphisme d'algèbres k -affinoïdes $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ tel que l'image de $\mathcal{M}(\mathcal{A}')$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit contenue dans V se factorise de manière unique par $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V$.

Espaces analytiques généraux. On veut maintenant recoller les espaces k -analytiques. Ce qui rend cette histoire compliquée c'est que les briques de base de la construction ne sont pas des parties ouvertes (comme par exemple en géométrie algébrique ou différentielle) mais des parties compactes. La définition d'espace k -analytique donnée en [Ber90] n'est pas assez générale, Berkovich la généralise en [Ber93] pour avoir plus k -espaces analytiques. La construction de Berkovich est très technique ; on se contente donc d'énoncer plusieurs faits.

Un *espace k -analytique* est un espace topologique localement compact et localement connexe par arcs X , avec des parties compactes distinguées qu'on appelle *domaines affinoïdes*. Avec un domaine affinoïde V on donne aussi une algèbre k -affinoïde \mathcal{A}_V et un homéomorphisme $V \cong \mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$. La famille des domaines affinoïdes doit satisfaire des conditions de *compatibilité*, de *maximalité* et de *recouvrement*.

- **Condition de compatibilité.** Si U et V sont deux domaines affinoïdes de X et $U \subset V$, on a un morphisme $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$ tel que le

diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathcal{A}_U) & \xrightarrow{\sim} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) & \xrightarrow{\sim} & V \end{array}$$

commute et identifie $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ à un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ (au sens de la définition 1.7).

- **Condition de maximalité.** On n'énonce seulement une : si U est un domaine affinoïde de X et V est un domaine affinoïde de U (au sens de la définition 1.7 et identifié U avec $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$), alors V est un domaine affinoïde de X .
- **Condition de recouvrement.** Si $U \subset X$, un G -recouvrement de U est une famille $\{U_i\}_i$ de parties de U telle que tout point $x \in U$ ait un voisinage dans U qui est de la forme $\cup_I U_i$, où I est un ensemble fini d'indices et $x \in \cap_I U_i$. On appelle alors *domaine analytique* de X toute partie de X qui est G -recouverte par les domaines analytiques de X que elle contient. Les conditions de recouvrement sont donc les suivantes : X lui même est un domaine analytique, et l'intersection de deux domaines affinoïdes de X est un domaine analytique de X .

Par exemple, un espace k -affinoïde est un espace k -analytique, ses domaines k -affinoïdes sont ceux de la définition 1.7. Un domaine analytique d'un espace k -analytique (par exemple un ouvert) est lui même un espace k -analytique.

Un *morphisme* d'espaces k -analytiques est une application continue compatible aux isomorphismes $U \cong \mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ et aux restrictions.

À toute domaine analytique V de X on associe l'anneau $\mathcal{O}(V) := \text{Hom}_{k-an}(V, \mathbb{A}_k^{1,an})$ ses éléments sont appelé *fonctions analytiques* sur V . Si U est un domaine k -affinoïde de X , on a $\mathcal{A}_U \cong \mathcal{O}(U)$. Si on le restreins aux ouverts de X , \mathcal{O} est un faisceau en anneaux, on appelle alors \mathcal{O} *faisceau structural* de X .

Comme pour les espaces k -affinoïdes on a un *produit fibré* dans la catégorie des espaces k -analytiques, obtenu globalisant le premier.

On sait définir le *bord* et l'*intérieur* d'un espace k -analytique, et plus généralement d'un morphisme entre espaces analytiques.

Un espace k -analytique est dit *bon* si tout point a une base de voisinages affinoïdes. Ce sont les espaces qu'on obtiendra en recollant naïvement les espaces k -affinoïdes comme en [Ber90]. Pour exemple, tout espace k -affinoïde est bon.

De manière analogue a ce qu'on fait en géométrie algébrique, on dit que un espace k -analytique X est *séparé* si le morphisme diagonal est une immersion fermée. Ceci est le cas si et seulement si l'espace topologique sous-jacent $|X|$ est Hausdorff.

Soit \mathcal{A} une algèbre affinoïde et soit l une extension complétée de k telle que $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k l$ est une algèbre strictement affinoïde. On définit la *dimension* k -

analytique de \mathcal{A} comme la dimension de Krull de $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k l$ (on montre que ça ne dépend pas de l). La *dimension k -analytique* d'un espace k -analytique est la borne supérieure des dimensions k -analytiques des \mathcal{A}_V , où les V sont les domaines k -affinoïdes de X .

1.3 Analytifié d'une variété algébrique

De manière analogue à ce qu'on fait en géométrie analytique complexe, on peut obtenir un espace k -analytique en partant d'une variété (plus précisément, d'un schéma localement de type fini) de façon fonctorielle, suivant [Ber90, 3.4].

Si $\mathcal{X} = \text{Spec}(A)$ avec A une k -algèbre de type fini, comme ensemble l'analytifié $X = \mathcal{X}^{an}$ est l'ensemble des semi-normes bornées sur A qui étendent la valeur absolue de k . La topologie est celle induite par la topologie produit de \mathbb{R}^A . Le cas général s'obtient alors par recollement.

La façon la plus simple de comprendre comment cet espace peut être vu comme espace k -analytique est de voir des exemples.

Exemple 1.8 (L'espace affine $\mathbb{A}_k^{1,an}$). La droite affine k -analytique est l'analytifié de la droite affine algébrique sur k $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[T])$. C'est donc l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[T]$ qui étendent la valeur absolue de k . Pour $r > 0$, si on note E_r le sous-ensemble de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ formé par les semi-normes φ tels que $|\varphi(T)| \leq r$, alors la restriction à $k[T]$ induit un homéomorphisme $i_r : \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\}) \rightarrow E_r$. La famille (E_r, i_r) est un atlas affinoïde sur $\mathbb{A}_k^{1,an}$, donc $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est un espace k -affinoïde localement compact. De manière analogue on définit l'espace affine k -analytique comme l'analytifié de $\mathbb{A}_k^n = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])$, ou de manière équivalente comme produit fibré de n copies de $\mathbb{A}_k^{1,an}$.

De manière analogue, l'analytifié d'un $\text{Spec}(k[\underline{T}]/I)$ quelconque est la réunion croissante des $\mathcal{M}(k\{r^{-1}T\}/I)$.

Exemple 1.9 (Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$). Le groupe multiplicatif analytique sur k est l'analytifié du groupe multiplicatif algébrique $\mathbb{G}_{m,k} = (A_k^1)^* = \text{Spec}(k[X, X^{-1}]) = \text{Spec}(k[X, Y]/(XY - 1))$.

On peut aussi définir le groupe multiplicatif analytique n -dimensionnel $\mathbb{G}_{m,k}^{n,an}$ comme l'analytifié de $\text{Spec}(k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}])$, ou de manière équivalente comme produit tensoriel complété de n copies de $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$.

On donne une liste de propriétés du foncteur d'analytification :

- L'espace k -analytique \mathcal{X}^{an} est toujours bon.
- L'espace k -analytique \mathcal{X}^{an} est séparé si et seulement si le schéma \mathcal{X} est séparé.
- La dimension k -analytique de \mathcal{X}^{an} est égal à la dimension du schéma \mathcal{X} .

- Le morphisme d’espaces annelés $\mathcal{X}^{an} \rightarrow X$ qui envoie une semi-norme sur son noyau est plat et surjectif; il induit une bijection entre les points rigides de \mathcal{X}^{an} et les points fermés de \mathcal{X} .
- \mathcal{X}^{an} est compact si et seulement si \mathcal{X} est propre, et alors les théorèmes de type GAGA s’appliquent.

Des importantes propriétés du foncteur d’analytification en géométrie analytique complexe ont été établies par Jean-Pierre Serre dans l’incontournable *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, paru en 1956. Depuis cet article on utilise souvent la sigle GAGA pour cet foncteur et ses propriétés.

Théorèmes de type GAGA ont été démontrés pour le foncteur d’analytification en géométrie analytique rigide par Kiehl; comme il se passe assez souvent, presque les mêmes preuves marchent dans la théorie de Berkovich (les nécessaires modifications se trouvent en [Ber90, 3.4, 3.5]).

Dans la pratique, les théorèmes GAGA, en géométrie analytique complexe comme en géométrie analytique non archimédienne, nous permettent souvent d’étudier variétés algébriques en appliquant aux analytifiés techniques de géométrie analytique, pour revenir dans le contexte de la géométrie algébrique. Par exemple Bosch et Lütkebohmert construisent ainsi le modèle de Néron des variétés abéliennes sur des corps non archimédiens.

Le tore analytique. On peut obtenir un espace analytique aussi comme quotient d’un espace analytique. Comme sur \mathbb{C} on a les tores analytiques complexes, quotients de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ par un réseau, ou de manière équivalente quotients du groupe multiplicatif par un sous-groupe discret, la même construction existe en géométrie k -analytique.

Soit k comme toujours un corps non archimédien complet et soit $q \in k$ avec $0 < |q| < 1$. L’élément q agit par multiplication sur le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$, on note alors $q^{\mathbb{Z}}$ le groupe d’automorphismes engendré par cette action q . L’action du groupe $q^{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$ est discontinue ($\mathbb{G}_{m,k}^{an}$ est recouvert par les couronnes fermés $U_i = \{|q^{i/2}| \leq |T| \leq |q^{(i-1)/2}|\}$ et $q^n U_i \cap U_i = \emptyset$ pour tout i, n) et donc on peut définir le quotient

$$\mathbb{T} = \mathbb{G}_{m,k}^{an} / q^{\mathbb{Z}},$$

qu’on appelle *tore k -analytique*. Il hérite par la projection $\mathbb{G}_{m,k}^{an} \rightarrow \mathbb{T}$ une structure d’espace analytique et comme ensemble il peut être vu comme le fermé défini par $\{1 \leq |T| \leq |q|\}$ avec les deux parties $\{|T| = |q|\}$ et $\{|T| = 1\}$ identifiées; on comprendra mieux comment visualiser la géométrie de cet espace après d’avoir étudié en détail la droite projective dans le prochain chapitre.

On démontre que \mathbb{T} est un espace k -analytique de dimension 1, séparé, connexe et propre.

On verra dans le troisième chapitre que les tores analytiques sont les analytifiés de certaines courbes elliptiques.

1.4 La fibre générique d'un schéma formel

Si \mathcal{X} est un schéma formel plat et topologiquement de présentation finie sur k° , on peut lui associer de manière fonctorielle sa *fibre spéciale* \mathcal{X}_s , le \widetilde{k} -schéma qu'on obtient en réduisant les équations qui définissent \mathcal{X} modulo k° mais aussi une *fibre générique* \mathcal{X}_η , l'espace k -analytique défini par les équations en question.

Si \mathcal{X} est le spectre formel d'une k° -algèbre topologiquement de présentation finie \mathcal{A} , \mathcal{X}_η est l'espace k -affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k)$, le cas général s'obtient alors par recollement. Parmi les fibres génériques de schémas formels on trouve des espaces analytiques qui ne sont pas bons.

L'approche à la géométrie analytique rigide via les schémas formels a été étudié à fond par Michel Raynaud.

2 La droite projective de Berkovich

La droite projective analytique est l'exemple le plus important de courbe analytique. On va se consacrer à son étude détaillé.

La définition est tout à fait celle que l'on attendait :

Définition 2.1. La *droite projective analytique* sur k , ou *droite projective de Berkovich* sur k , notée $\mathbb{P}_k^{1,an}$, est l'analytifié de la droite projective \mathbb{P}_k^1 .

Comme \mathbb{P}_k^1 est propre, $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est compact. En fait, $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{A}_k^{1,an}$, qui, comme l'on a vu, est localement compact ; comme on verra plus tard on l'obtient en ajoutant à $\mathbb{A}_k^{1,an}$ un unique point à l'infini.

On se restreint au cas où le corps k est algébriquement clos, qui est plus facile à étudier et qui possède déjà toutes les propriétés intéressantes ; on parlera, à la fin de la section, de la méthode permettant de se ramener au cas général en partant du cas particulier. On demande aussi que la valeur absolue soit non triviale, le cas trivialement valué n'étant pas très intéressant.

2.1 Les points.

On veut décrire précisément l'espace topologique sous-jacent à $\mathbb{P}_k^{1,an}$. Comme $\mathbb{P}_k^{1,an} = \mathbb{A}_k^{1,an} \cup \{\infty\}$, on peut commencer par étudier les points de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Cela signifie classer les semi-normes multiplicatives sur $k[T]$ qui prolongent la valeur absolue de k .

Tout d'abord, on observe que l'on peut plonger k d'une façon naturelle dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$, en envoyant tout élément a dans k sur la semi-norme multiplicative :

$$\begin{aligned} |\cdot|_a : k[T] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto |f(a)|. \end{aligned}$$

On vérifie tout de suite qu'il s'agit bien d'une semi-norme multiplicative qui prolonge la valeur absolue de k . On appelle ces semi-normes *points de type (1)* et pour simplifier on écrit également a pour le point $|\cdot|_a$ de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Ce sont les *points rigides* classiques.

Ensuite, pour $a \in k$ et $r > 0$ on note $E(a, r) = \{b \in k \mid |b - a| \leq r\}$ pour désigner la boule fermée de k de centre a et rayon r .

On peut associer à $E(a, r)$ la semi-norme suivante :

$$\begin{aligned} |\cdot|_{E(a,r)} : k[T] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \sum_{i \geq 0} a_i (T - a)^i &\longmapsto \max_i |a_i| r^i. \end{aligned}$$

La seule propriété non évidente est la multiplicativité de $|\cdot|_{E(a,r)}$, qui vient en fait de l'inégalité ultramétrique.

Dans le cas où le rayon r appartient au groupe des valeurs $|k^*|$ on appelle cette semi-norme point de *type (2)*. Dans le cas contraire, on l'appelle point de *type (3)*; dans les deux cas on le note $\eta_{a,r}$. On démontre que cette semi-norme coïncide avec le supremum du polynôme f sur le disque $E(a,r)$ (voir [Bos08], 1.4.7), ce qui implique que ces points dépendent seulement du disque et pas de son centre ou de son rayon : si $E(a,r) = E(b,r')$, alors $\eta_{a,r} = \eta_{b,r'}$ (en effet l'égalité des disques implique aussi $r = r'$); en particulier, $\eta_{a,r} = \eta_{b,r}$ lorsque $|b - a| \leq r$. Il faut noter qu'ici on utilise le fait que le corps k est algébriquement clos et donc sa valuation n'est pas discrète, autrement on pourrait avoir $E(a,r) = E(a,r')$ avec $r < r'$ (c'est le cas s'il n'y a pas de point de $|k^*|$ dans $[r, r']$, ce qui peut se passer si la valuation est discrète) et donc par exemple $\eta_{a,r}(T) = r \neq r' = \eta_{a,r'}(T)$. Dans le cas limite $r = 0$ on retrouve les points de *type (1)*.

Il nous reste encore des points à décrire. On considère un ensemble ordonné I et une suite $\mathcal{E} = \{E(a_i, r_i)\}_{i \in I}$ de boules avec $a_i \in k$, $r_i > 0$ qui est *décroissante*, ce qui signifie que $E(a_i, r_i) \subset E(a_j, r_j)$ lorsque $i \leq j$, et telle que son intersection $\bigcap_{i \in I} E(a_i, r_i)$ soit vide (l'existence de telles suites n'est pas évidente a priori, mais comme on verra plus tard il y a beaucoup de corps qui en ont, parmi lesquels le corps \mathbb{C}_p). On peut alors définir la semi-norme :

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathcal{E}} : k[T] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \inf_i |f|_{E(a_i, r_i)} \end{aligned}$$

qui est un point $\eta_{\mathcal{E}}$ de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Ces points sont différents des points de *type (2)* ou *(3)*, sinon l'inf (qui est aussi la lim vu que la suite des rayons doit être décroissante) devrait être égal à une $|\cdot|_{E(a,r)}$.

On a maintenant décrit tout point de $\mathbb{A}_k^{1,an}$, comme nous l'assure le résultat suivant dû à Berkovich :

Théorème 2.2. *Tout point de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est de type (1), (2), (3) ou (4).*

Démonstration. Soit $x = |\cdot|_x$ un point de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. On considère la famille suivante de boules fermées de k :

$$\mathcal{E} = \{E(a, |T - a|_x) \text{ t.q. } a \in k\}.$$

Cet ensemble est totalement ordonné par l'inclusion parce que si $|T - a|_x \leq |T - a'|_x$ alors $|a - a'| = |a - a'|_x = |(T - a') - (T - a)|_x \leq |T - a'|_x$ et donc $E(a, |T - a|_x) \subset E(a', |T - a'|_x)$. Il n'est pas difficile de vérifier que pour tout $a \in k$, la semi-norme $|\cdot|_{\mathcal{E}} := \inf_{E \in \mathcal{E}} |\cdot|_E$ associé à telle famille vérifie $|T - a|_{\mathcal{E}} = |T - a|_x$. Le corps k étant algébriquement clos, une semi-norme multiplicative est déterminée par ses valeurs sur les monômes de la forme $T - a$, ce qui implique que $|\cdot|_{\mathcal{E}} = |\cdot|_x$. Donc x est un point de *type*

(1), (2), (3) ou (4), respectivement si l'intersection des éléments de \mathcal{E} est un singleton, une boule fermée avec rayon en k^* , boule fermée avec rayon hors de k^* , ou le vide. \square

La droite projective analytique $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est obtenue en rajoutant à la droite affine analytique un point de *type* (1) à l'infini, noté ∞ :

$$\mathbb{P}_k^{1,an} = \mathbb{A}_k^{1,an} \cup \{\infty\}$$

Le point à l'infini correspond à la limite d'une suite croissante de boules fermées avec $r \rightarrow +\infty$. On peut observer qu'avec les suites croissantes on n'a pas des problèmes comme dans le cas des suites décroissantes : une suite croissante de boules fermées "converge" vers sa réunion, qui est une boule fermée de rayon égal à la limite des rayons quand celle-ci est finie, et tout k dans le cas contraire. De plus, deux suites croissantes dont les rayons tendent vers l'infini sont cofinales, d'où l'unicité du point à l'infini.

Ça vaut la peine d'ouvrir une parenthèse à propos de l'existence de points de *type* (4) :

Corps maximalelement complets. Un corps ultramétrique k est dit *maximalement complet* si toute suite décroissante de boules fermées a une intersection non vide. Tout corps maximalelement complet est complet : si $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans k , alors $\{E(x_n, \sup_{m > n} |x_n - x_m|)\}_{n \geq 0}$ est une suite de boules dont l'intersection doit être un singleton $\{x\}$, et donc la suite de départ converge vers x . Les points de *type* (4) apparaissent dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$ si et seulement si le corps k n'est pas maximalelement complet.

Étant donné une suite décroissante de boules fermées $\{E(a_i, r_i)\}_{i \geq 0}$ dans un corps ultramétrique complet, la suite des rayons $\{r_i\}_{i \geq 0}$ est décroissante et bornée, donc elle converge vers un certain $r \geq 0$. Lorsque $\lim_i r_i = 0$, pour l'inégalité ultramétrique la suite des centres $\{a_i\}_{i \geq 0}$ est une suite de Cauchy, donc convergente, et sa limite est un point de l'intersection. Ça montre que, pour avoir une intersection vide, r doit être strictement plus grand de 0.

On note que si k est le corps de fractions d'un anneau de valuation discrète, alors il est maximalelement complet. En effet, si on prend une suite décroissante de boules avec rayons $r_i \in |k^*|$ (clairement toute suite peut être ré-écrite comme ça), alors la suite de ces rayons est stationnaire et donc la suite des boules est stationnaire aussi. Donc la droite affine analytique sur un corps trivialement valué n'a pas de points de *type* (4). Par contre, comme on avait annoncé plus en haut, on n'a pas besoin d'aller loin pour trouver un exemple de corps non maximalelement complet, et donc de droite analytique avec des points de *type* (4) :

Proposition 2.3. \mathbb{C}_p n'est pas maximalelement complet.

Démonstration. On démontre plus précisément que, pour toute suite strictement décroissante de rayons $\{r_i\}_{i \geq 0}$ avec $\lim_i r_i = r > 0$, il y a des suites décroissantes de boules fermées de \mathbb{C}_p de rayons r_i avec intersection vide. Soit B une boule fermée de rayon r_0 . Comme $r_1 < r_0$ et vu l'inégalité ultramétrique, on peut trouver deux boules fermées de rayon r_1 et disjointes B_0 et B_1 dans B . En répétant l'argument, on trouve deux boules fermées de rayon r_2 et disjointes B_{00} et B_{01} dans B_0 , et de même B_{10} et B_{11} dans B_1 . On peut continuer à doubler le nombre de boules : on construit ainsi une infinité non dénombrable de suites décroissantes de boules fermées ayant pour rayons les r_i et avec des intersections qui sont à deux à deux disjointes par construction. Or, on démontre sans difficulté que ces intersections sont soit vides soit des boules fermées de rayon r , donc toujours des parties ouvertes. Mais la topologie de \mathbb{C}_p a une base dénombrable (il suffit de voir que \mathbb{Q}^{alg} est dénombrable et dense dans \mathbb{Q}_p^{alg} qui est dense dans \mathbb{C}_p), donc on ne peut pas avoir un ensemble non dénombrable d'ouverts disjoints non vides, d'où la conclusion que presque toute suite qu'on a construit a une intersection vide. \square

L'argument qu'on a utilisé est assez standard, on peut par exemple voir le classique d'analyse p -adique [Rob00], paragraphe 3.3.4.

Même si on n'a pas construit explicitement une suite de boules convenable, dès qu'on en connaît l'existence ça va être joli de voir comment on peut la voir géométriquement dans $\mathbb{P}_k^{1,an}$.

Pour beaucoup de questions d'analyse p -adique (par exemple pour démontrer de bons théorèmes d'existence et unicité de solutions d'équations différentielles p -adiques) on a besoin de travailler sur des corps maximalement complets. C'est intéressant de savoir que, pour un corps valué ultramétrique, être maximalement complet est équivalent à ne pas avoir des *extensions immédiates* (i.e. ayant même groupe des valeurs et même corps résiduel) non triviales. En effet, on peut démontrer que tout corps ultramétrique admet une extension immédiate qui est maximalement complète, et que ses extensions maximalement complètes sont des éléments maximaux entre les extensions ayant un corps résiduel et un groupe des valeurs donnés (voir [Bou64], ch. VI, §10, ex.2).

Corps résiduels complétés des points de $\mathbb{P}_k^{1,an}$. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le corps résiduel $\mathcal{H}(x)$ d'un point x de $\mathbb{P}_k^{1,an}$? Ça dépend bien sûr du type de point ; on résume tout ce qu'on sait dans la proposition suivante

Proposition 2.4. *Soit $x \in \mathbb{P}_k^{1,an}$. On a :*

- (i) *Si x est de type (1), alors $\mathcal{H}(x) = k$;*
- (ii) *Si x est de type (2), alors $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \cong \widetilde{k(t)}$ (extension transcendante de \widetilde{k}) et son groupe des valeurs est $|\mathcal{H}(x)^*| = |k^*|$;*

- (iii) Si $x = \eta_{a,r}$ est de type (3), alors $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \cong \widetilde{k}$ et $|\mathcal{H}(x)^*|$ est engendré par $|k^*|$ et r ;
- (iv) Si x est de type (4), alors $\mathcal{H}(x)$ est une extension immédiate non triviale de k .

Démonstration. Si x est de type (1) son noyau est un idéal maximal, donc (i) est évident. Si x est la semi-norme supremum sur la boule fermée $E(a, r)$, x est de type (2) si $r = |t|$ pour un $t \in k^*$. La fonction $f(x) = t-1(x-a)$ de $\mathcal{H}(x)$ est envoyé dans un élément de norme 1 de $\mathcal{H}(x)$, donc elle se réduit à un élément transcendent sur \widetilde{k} , d'où (ii). Des calculs analogues nous donnent aussi (iii) et (iv). \square

Plus tards on se servira de (ii) en définissant le genre d'un point de type (2) d'une courbe analytique.

2.2 La topologie et les chemins.

La topologie de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est par définition celle induite par la topologie produit de $\mathbb{R}_+^{k[T]}$, i.e. la moins fine pour laquelle, pour tout $f \in K[T]$, l'application d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^{1,an} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}$$

est continue.

C'est très utile d'avoir une caractérisation plus explicite des ouverts de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. On rappelle qu'une *prébase* pour un espace topologique X est une famille \mathcal{B} d'ouverts telle que tout ouvert de X s'écrit comme réunion arbitraire d'intersections finies d'éléments de \mathcal{B} , i.e. telle que les intersections finies d'éléments de \mathcal{B} forment une base de la topologie de X . On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.5. $\mathbb{A}_k^{1,an}$ admet une prébase de sa topologie formée par les parties de la forme :

$$\left\{ |\cdot| \in \mathbb{A}_k^{1,an} \text{ t.q. } |T - x| < a \right\} \text{ ou } \left\{ |\cdot| \in \mathbb{A}_k^{1,an} \text{ t.q. } |T - x| > a \right\}$$

pour $x \in k$, $a \geq 0$.

Démonstration. On note π_f l'évaluation associée à l'élément $f \in k[T]$. Par définition de la topologie produit, une base de la topologie de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est :

$$\mathcal{B} = \left\{ \pi_f^{-1}(U) \text{ t.q. } f \in k[T], U \text{ ouvert dans } \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Mais une base de la topologie de \mathbb{R}_+ est formée par les intervalles de la forme $[0, a[$ ou $]a, +\infty[$ pour $a \geq 0$, donc on est réduits à considérer seulement les

préimages de tels intervalles :

$$\begin{aligned}\pi_f^{-1}([0, a[) &= \left\{ |\cdot| \in \mathbb{A}_k^{1,an} \text{ t.q. } |f| < a \right\}, \\ \pi_f^{-1(]a, +\infty[) &= \left\{ |\cdot| \in \mathbb{A}_k^{1,an} \text{ t.q. } |f| > a \right\}.\end{aligned}$$

Finalement, vu que k est algébriquement clos on peut écrire tout polynôme comme $f = (T - x_1)(T - x_2) \cdots (T - x_n)$. Il nous suffit donc de prouver que $\pi_{fg}^{-1}([0, a[)$ et $\pi_{fg}^{-1(]a, +\infty[)$ peuvent s'écrire comme réunion arbitraire d'intersections finies de parties de la forme $\pi_f^{-1}([0, a[)$, $\pi_f^{-1(]a, +\infty[)$, $\pi_g^{-1}([0, a[)$, et $\pi_g^{-1(]a, +\infty[)$.

Or, c'est très facile car, en utilisant la multiplicativité de la norme, on voit aussitôt que :

$$\{|\cdot| \text{ t.q. } |fg| < a\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \left(\left\{ |\cdot| \text{ t.q. } |f| < \frac{a}{t} \right\} \cap \{|\cdot| \text{ t.q. } |g| < t\} \right),$$

et de manière analogue :

$$\{|\cdot| \text{ t.q. } |fg| > a\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \left(\left\{ |\cdot| \text{ t.q. } |f| > \frac{a}{t} \right\} \cap \{|\cdot| \text{ t.q. } |g| > t\} \right).$$

On remarque que ce qu'on fait ici c'est tout simplement écrire la superficie au-dessus d'une hyperbole comme réunion de rectangles. La proposition vient maintenant de la répétition de cet argument factorisant f . \square

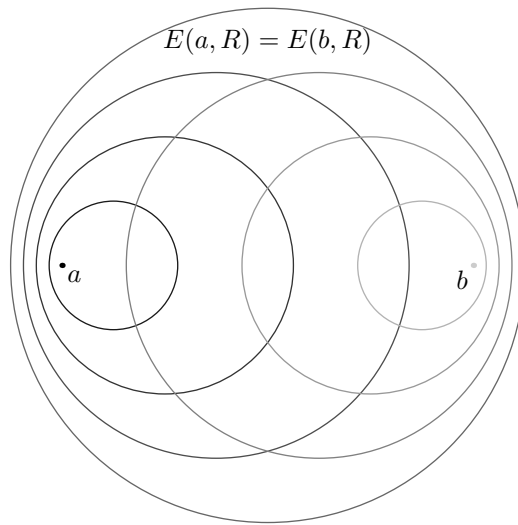
En passant, on note que le résultat important suivant est maintenant évident :

Corollaire 2.6. *Les points rigides de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ en forment une partie dense.*

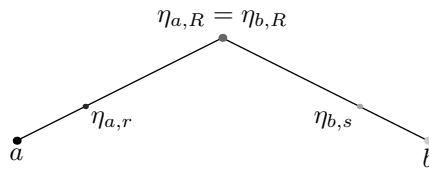
On n'a pas encore besoin d'utiliser la proposition ci dessus pour étudier l'espace topologique $\mathbb{A}_k^{1,an}$; ça vaut la peine de faire d'abord des observations élémentaires. En revenant aux boules, on voit aussitôt que, si $x = \eta_{a,r}$, alors les points de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ proches de x sont les semi-normes associées aux boules "près" de $E(a, r)$. Deux boules qui induisent deux semi-normes assez proches doivent avoir une grande intersection, mais on rappelle qu'une conséquence élémentaire de l'inégalité ultramétrique est le fait que deux boules quelconques de k sont soit disjointes soit contenues l'une dans l'autre. On peut être plus précis en décrivant les chemins reliant les points de $\mathbb{P}_k^{1,an}$. En effet, comme \mathbb{P}^1 est connexe, on sait que $\mathbb{P}_k^{1,an}$ doit être connexe par arcs. En réalité, $\mathbb{P}_k^{1,an}$ jouit d'une propriété beaucoup plus forte que d'être connexe par arcs, on pourrait dire qu'il est "uniquement connexe par arcs" : pour tout couple de points $x, y \in \mathbb{P}_k^{1,an}$, il existe un seul fermé de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ d'extrémités x et y . Par simplicité commençons par décrire explicitement l'arc qui connecte deux points rigides distincts a et b de $\mathbb{P}_k^{1,an}$.

Si $R = |b - a|$, alors $E(a, R) = E(b, R)$ est la boule fermée minimale qui contient a et b . L'arc reliant a et b est alors formé par les points qui correspondent aux boules $E(a, r)$ avec $0 \leq r \leq R$ ou aux boules $E(b, s)$ avec $0 \leq s \leq R$; on peut le visualiser de la manière suivante : on part de la boule $E(a, 0)$, i.e. le point a , et on fait croître son rayon jusqu'à R , donc jusqu'à obtenir une boule qui contient a et b (on a relié a et $\eta_{a,R} = \eta_{b,R}$), on voit maintenant cette boule comme $E(b, R)$ et on fait décroître son rayon jusqu'à 0.

Voilà ce qui se passe au niveau des boules dans k :



et voilà qu'on a obtenu un arc au niveau des points de $\mathbb{P}_k^{1,an}$:

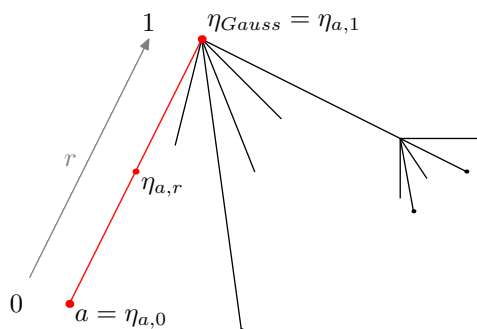


C'est bien de remarquer que seulement les deux extrémités du chemin sont des points rigides classiques, les autres sont des points de *type (2)* ou *(3)*. L'unicité d'un tel chemin vient du fait qu'on a une seule façon de faire croître une boule contenant un point a ; l'unique boule fermée de rayon r et contenant a est $E(a, r)$.

Relier des points de *type (2)* ou *(3)* n'est pas plus difficile : soient x et y les points de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ associés aux boules fermées (éventuellement dégénérées) $E(a, r)$ et $E(a', r')$ respectivement ; si l'une est contenue dans l'autre alors il nous suffit de faire croître le rayon de la petite jusqu'à obtenir la grande, autrement on peut faire de même en reliant chacune à la plus petite boule contenant les deux. L'unicité se montre comme dans le cas précédent.

Où sont dans tout ça les points de *type (4)*? Ils sont nécessaires pour compactifier ce qu'on obtient. En effet on a bien vu que les chemins qu'on vient de construire ne contiennent que des points de *type (1)* (toujours aux extrémités), ou bien des points de *type (2)* ou *(3)* (toujours à l'intérieur); le problème c'est qu'il y a des arcs qui ne se terminent pas par des points de *type (1)*. L'extrémité d'un tel arc est alors un point de *type (4)*. Par exemple, la suite de points (de *type (3)* et *(4)*) associée à une suite de boules \mathcal{E} définissant un point de *type (4)*, soit $\eta_{\mathcal{E}}$, converge vers ce point le long du chemin reliant la première boule à $\eta_{\mathcal{E}}$. Le fait qu'un tel chemin soit unique est lié au fait que deux suites différentes définissant $\eta_{\mathcal{E}}$ et ayant même intersection sont clairement cofinales.

On peut prendre comme point de référence le point de *type (2)* $\eta_{0,1}$, qu'on appelle *point de Gauss* et qu'on note η_{Gauss} parce que il s'agit bien de la norme de Gauss sur les polynômes. On peut alors imaginer $\mathbb{P}_k^{1,an}$ comme un arbre avec des branches partant de η_{Gauss} dans toutes les directions, et chaque branche va encore se ramifier plusieurs fois jusqu'à arriver à tout point de *type (1)* ou *(4)*, sans qu'il y ait de boucles. On s'imagine une branche reliant à η_{Gauss} un point de k comme paramétrisé par le rayon $r \in [0, 1]$. Voilà comment on peut la visualiser naïvement :



On a coloré l'arc reliant un point a de *type (1)* à η_{Gauss} .

Mais il faut être bien plus précis que ça. Quand est-ce qu'on a un point de branchement? Les différentes "tangentes" à la droite projective en un point x (les branches de l'arbre aboutissant en x , ou également les composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{x\}$) sont faciles à décrire : quand x est associé à la boule fermée $E(a, r)$, ces branches correspondent aux différentes façons de faire croître ou décroître cette boule. Il y a donc une seule tangente allant vers l'infini (le point ∞ nous sert alors pour compactifier cette unique branche qui monte), parce qu'il y a une seule façon de faire croître une boule fermée quelconque (si on veut le voir à l'envers, c'est parce que deux suites décroissantes de boules fermées ayant pour intersection la même boule donnée sont cofinales); mais il se peut qu'il y ait plusieurs tangentes "descendant"; en effet ça dépend du type de point. Lorsque le point est dans k , clairement il

n'y a pas grand chose à faire : on ne peut pas faire rétrécir une boule de rayon zéro ; ces points sont évidemment toujours des extrémités. Si par contre le point est associé à la boule non dégénérée $E(a, r)$, vu qu'on veut voir le comportement de boules fermées dans $E(a, r)$ lorsque leur rayon s'approche de r , c'est nécessaire et suffisant d'étudier les boules ouvertes de rayon r dans $E(a, r)$. Si le point est de *type (3)*, c'est clair que la boule ouverte de rayon r coïncide avec $E(a, r)$: de tels points ne sont pas de points de branchement, il y a seulement deux tangentes, l'une qui monte et l'autre qui descend. Les choses deviennent un peu plus compliquées lorsqu'on considère des points de *type (2)*, par exemple η_{Gauss} . Le point de Gauss est associé à la boule $E(0, 1)$ qui n'est autre que k° ; la boule ouverte de centre 0 et rayon 1 est $k^{\circ\circ}$. On sait que $\tilde{k} = k^\circ/k^{\circ\circ}$; choisissons pour tout élément de \tilde{k} un relèvement dans k° et notons T l'ensemble de ces relèvements. On a alors $E(0, 1) = \cup_{t \in T} E(t, 1)^-$, et la réunion est disjointe : les branches qui descendent de η_{Gauss} sont donc en bijection avec \tilde{k} . Il en va de même pour tout point de *type (2)*, puisque si r est la valeur absolue d'un élément x de k , la multiplication par x est un homéomorphisme entre $E(0, 1)$ et $E(0, r)$, et ce dernier est homéomorphe à $E(a, r)$ via la translation par a (c'est clair que les opérations de corps sont compatibles avec la structure topologique). Donc on parlera aussi de *points de branchement* pour indiquer les points de *type (2)*.

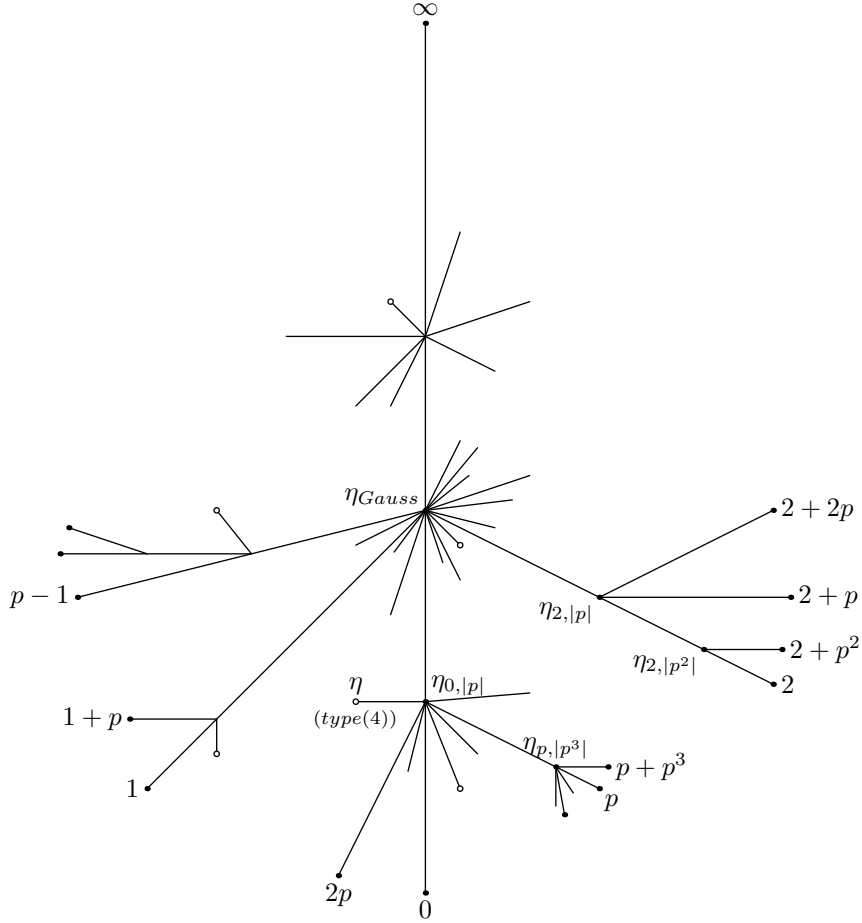
On peut résumer tous ces raisonnements dans une proposition :

Proposition 2.7. *Soit $x \in \mathbb{P}_k^{1,an}$:*

- *si x est de type (1) ou (4), alors $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{x\}$ est connexe ;*
- *si x est de type (2), alors les composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{x\}$ sont en bijection avec $\mathbb{P}_{\tilde{k}}^1$;*
- *si x est de type (3), alors $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes.*

Pour distinguer les points de *type (1)* des points de *type (4)*, on peut penser aux premiers comme étant les extrémités des “bonnes branches”, celles qui terminent quand le rayon r tend vers 0 (sauf dans le cas de ∞ : dans ce cas, r tend vers $+\infty$) ; les deuxièmes sont par contre les extrémités de branches qui, hélas !, se terminent “trop tôt”, à cause de la non complétude maximale de k elles n'arrivent pas jusqu'à un point de *type (1)*.

On peut enfin donner un meilleur dessin de la droite projective sur \mathbb{C}_p :

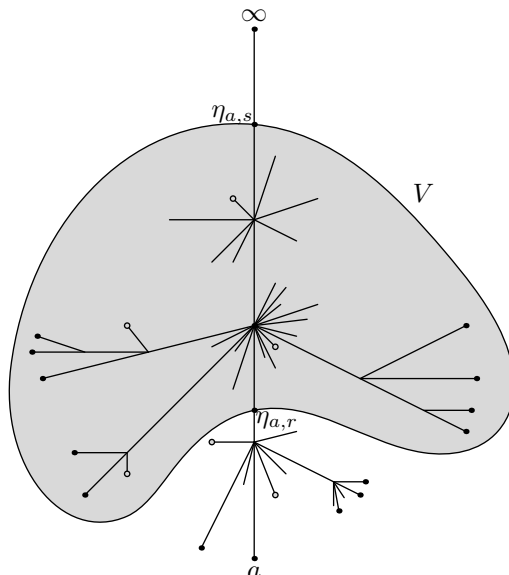


Ici les extrémités pleines sont des points de *type (1)*, celles vides sont des points de *type (4)*.

Il convient de penser les boules $E(a, r)$ de k comme des boules de $\mathbb{P}_k^{1,an}$. En effet, on pourrait faire ça rigoureusement en définissant une métrique sur la droite projective analytique d'une façon très naturelle, mais ça dépasse le but de ce mémoire. On se contente ici de penser la boule $E(a, r)$ dans $\mathbb{P}_k^{1,an}$ comme le complémentaire de l'ouvert défini par la condition $|T - a| > r$. Son bord est alors formé par le point $\eta_{a,r}$. On dessine une boule dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$

avec $s > 1$; tout ouvert de telle forme contient entièrement toutes les composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{\eta_{Gauss}\}$ sauf une seule (celle contenant a , ou bien celle contenant ∞).

Voilà donc un exemple de voisinage ouvert V du point de Gauss :



Avec les notations de la proposition 2.5 l'ouvert ci-dessus est

$$V = \{|\cdot| \text{ t.q. } r < |T - a| < s\},$$

. Les ouverts de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ de telle forme sont dits *couronnes*. La couronne de l'exemple a pour rayons $r < 1 < s$.

C'est intéressant de remarquer que les composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{\eta_{Gauss}\}$ sont les ouverts $\{|\cdot| \text{ t.q. } |T - t| < 1\}$ où les t sont les relèvements des éléments de \tilde{k} dans k° (composantes allant vers les points de k), et l'ouvert $\{|\cdot| \text{ t.q. } |T| > 1\}$ (composante vers l'infini) ; ceci concordant avec la proposition 2.7.

Le fait d'avoir une topologie si peu fine est le prix à payer pour la compacité de la droite projective analytique. En effet, si V est un voisinage ouvert d'un point $x \in \mathbb{P}_k^{1,an}$ de *type (2)*, V et les composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{\eta_{Gauss}\}$ forment un recouvrement ouvert de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ dont par compacité on peut extraire un sous recouvrement fini. On a redémontré que V contient toute composante sauf un nombre fini.

Maintenant qu'on est capables de bien visualiser la droite projective analytique, l'importante proposition suivante n'est pas surprenante :

Proposition 2.8. $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est un espace topologique contractile et donc, en particulier, simplement connexe.

Démonstration. On montre en effet quelque chose de plus fort : le point ∞ est un rétract par déformation fort de $\mathbb{P}_k^{1,an}$, la rétraction étant l’application suivante :

$$\Phi(\eta_{a,r}, t) = \begin{cases} \eta_{a,r} & \text{si } t < r \\ \eta_{a,t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, $t \in [0, +\infty]$ et $\Phi(\eta_{a,r}, +\infty) := \infty$. Si on veut une rétraction plus “classique”, avec le paramètre t dans l’intervalle $[0, 1]$, il suffit de remarquer que les deux intervalles sont homéomorphes via l’application $t \mapsto 1/(t + 1)$. La continuité de Φ est évidente. \square

2.3 Droite sur un corps ultramétrique complet quelconque.

Jusqu’à maintenant, en étudiant $\mathbb{P}_k^{1,an}$, on a plusieurs fois utilisé d’une façon déterminante l’assomption que le corps k été algébriquement clos. Pour revenir au cas général, on peut se servir de l’utile proposition suivante :

Proposition 2.9. *Soient k un corps ultramétrique complet, $\widehat{k^{alg}}$ le complété d’une clôture algébrique k^{alg} de k et $G = Gal(k^{alg}|k)$. Alors G agit sur $\widehat{k^{alg}}$ et induit un isomorphisme :*

$$\mathbb{A}_{\widehat{k^{alg}}}^{1,an}/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_k^{1,an}.$$

Pour la preuve, je renvoie à [Ber90], où c’est le corollaire 1.3.6.

Ça nous permet d’étudier facilement le cas de la droite projective analytique sur un corps ultramétrique quelconque. Toute orbite de G est clairement constituée de points ayant le même corps résiduel complété et donc étant du même type. On peut alors parler du type d’un point de $\mathbb{P}_k^{1,an}$, en le définissant comme le type de ses antécédents par l’application décrite dans la proposition ci-dessus.

Une étude complète étant assez compliquée, on se limite à dire ce qui se passe pour les points de *type (1)*. En imitant la géométrie algébrique classique, on appelle *points rationnels* les points du corps résiduel complété k ; ce sont les évaluations $f \mapsto |f(x)|$ pour $x \in k$. Dans le cas algébriquement clos, les points rationnels coïncident avec les points rigides, mais maintenant on a beaucoup plus de points ; en effet, on a une évaluation $f \mapsto |f(x)|$ pour tout point x de k^{alg} (mais attention, deux points dans la même orbite de G définissent le même point) ; on obtient ainsi les *points rigides*, i.e., les points ayant comme corps résiduel complété une extension finie de k . En effet, le corps résiduel complété d’un tel x est $k[T]/(P)$, où P est le polynôme minimal de x . De plus, si le corps k est parfait, grâce au théorème de l’élément primitif, toute extension finie de k est de telle forme et elle est donc le corps résiduel complété d’un point rigide. Les points rigides sont donc de points de *type (1)*, mais il faut faire attention car il y a aussi des points de *type (1)* qui ne

sont pas rigides : c'est le cas des évaluations par des éléments de $\widehat{k^{alg}} \setminus k^{alg}$; par exemple, un point α de \mathbb{C}_p qui n'est pas algébrique sur \mathbb{Q}_p définit un point de *type (1)* de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{1,an}$ de corps résiduel complété $\widehat{\mathbb{Q}_p(\alpha)}$, complété d'une extension transcendante de \mathbb{Q}_p .

En général, le résultat de l'action du groupe de Galois est donc d'identifier entre elles quelques branches de $\mathbb{P}_{\widehat{k^{alg}}}^{1,an}$, mais sans changer ni l'allure locale de la droite ni le fait qu'elle ressemble à un arbre.

La droite projective analytique sur un corps k trivialement valué n'est pas intéressante pour ce mémoire, mais seulement dans un souci d'exhaustivité on décrit brièvement sa structure. Malheureusement, on ne peut pas appliquer les mêmes techniques, mais on démontre qu'on a également un point "de Gauss" et, à partir de ça, des branches allant vers les points rigides, qui sont associés aux polynômes irréductibles de $k[T]$. Une autre branche relie le point de Gauss avec le point à l'infini. L'aspect de la droite projective est donc semblable à celui de la droite projective sur un corps non trivialement valué, mais il y a un seul point de branchement. La topologie est celle qu'on imagine : toute branche est homéomorphe à un intervalle réel et un voisinage du point de branchement contient entièrement toutes les composantes connexes de son complémentaire sauf un nombre fini d'entre elles.

En résumant, on peut dire qu'on a démontré que, pour n'importe quel corps ultramétrique complet k , la droite projective k -analytique $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est un espace topologique compact et simplement connexe dont tout couple de points est relié par un unique arc. On a décrit sa structure "d'arbre", les types de points et leur corps résiduel complété. Les points rigides en forment une partie dense.

On peut maintenant se consacrer à l'étude des courbes analytiques générales.

3 Courbes Analytiques

Après avoir étudié en détail la structure de $\mathbb{P}_k^{1,an}$, on va maintenant parler des courbes k -analytiques quelconques, et en particulier des analytifiés des courbes algébriques. On va montrer comment on peut classer leurs points en quatre types de manière similaire à ce qu'on a fait pour la droite projective. A la fin on va étudier en détail l'exemple des courbes de Tate, i.e. les analytifiés des courbes elliptiques à mauvaise réduction, sur un corps algébriquement clos. On va les caractériser parmi les analytifiés des courbes elliptiques comme celles qui sont isomorphes à un tore k -analytique, ou encore comme celles qui sont homotopes à un cercle. On se rendra compte que souvent la géométrie k -analytique nous offre très naturellement une interprétation très géométrique de résultats qui étaient peu intuitifs dans le cadre de la géométrie rigide. Avec la théorie de Berkovich on peut se servir d'instruments topologiques comme par exemple les revêtements universels.

3.1 Qu'est-ce que c'est une courbe analytique

On peut donc se consacrer à l'étude des courbes analytiques générales. On commence bien sûr avec une définition.

Définition 3.1. On appelle courbe k -analytique tout k -espace analytique séparé et purement de dimension analytique 1.

On remarque que pour un espace k -analytique de dimension 1 être purement de dimension 1 est équivalent à n'avoir pas des points rigides isolés.

La droite projective k -analytique $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est clairement une courbe analytique suivant cette définition ; c'est le premier exemple qu'on va toujours considérer.

Remarque 3.2. Une telle courbe k -analytique est toujours un graphe réel, autrement dit un quasi-polyèdre de dimension 1 au sens de de [Ber90], ce qui nous dit en particulier que chaque ouvert connexe est dénombrable à l'infini (réunion dénombrable d'ensembles compacts), ce qui on peut démontrer explicitement dans le cas particulier de $\mathbb{P}_k^{1,an}$.

3.2 Types des points et genre d'un point de *type* (2)

Comme pour la droite analytique, on peut classifier les point de toute courbe k -analytique en quatre *types*. Pour faire ça on généralise la caractérisation qu'on a obtenu en 2.4, où on a classé les points de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ suivant leurs corps résiduels complétés. On considère ici les analogues transcendentes du degré de ramification et du degré résiduel d'une extension de k : si K est une extension (éventuellement infinie) de k on note $E_{K|k}$ le \mathbb{Q} -rang de $|K^\times|/|k^\times| \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et on note $F_{K|k}$ le degré de transcendance de \tilde{K} sur \tilde{k} .

Définition 3.3. Soit x un point de la courbe k -analytique X , et soit $\mathcal{H}(x)$ son corps résiduel. On définit le *type* de x comme suit :

- si $\mathcal{H}(x) \subset \widehat{k^a}$, on dit que x est de type 1 ;
- si $F_{\mathcal{H}(x)|k} = 1$, on dit que x est de type 2 ;
- si $E_{\mathcal{H}(x)|k} = 1$, on dit que x est de type 3 ;
- si $E_{\mathcal{H}(x)|k} = F_{\mathcal{H}(x)|k} = 0$ mais x n'est pas de type 1, on dit que x est de type 4.

On voit tout de suite que pour $\mathbb{P}_k^{1,an}$ cette définition coïncide avec celle qu'on a donnée dans le chapitre précédente. Le fait que tout point de la courbe X tombe dans une de ces quatre catégories, est conséquence d'un bien connu résultat générale de la théorie des corps valués, l'inégalité de Abhyankar (voir [Bou64]) :

Lemme 3.4. Soit K une extension du corps non-archimédien complet k de degré de transcendance n . Alors :

$$E_{K|k} + F_{K|k} \leq n.$$

On peut voir une différence entre les points d'une courbe k -analytique quelconque et ceux de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ en regardant par exemple aux points de *type* (2). En effet pour tout point de *type* (2) de $\mathbb{P}_k^{1,an}$, $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \cong \widetilde{k}(t)$ (c'est (ii) de la proposition 2.4), alors que par contre si x est un point de *type* (2) d'une courbe k -analytique quelconque alors $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est un *corps de fonctions* quelconque sur \widetilde{k} , i.e. une extension de \widetilde{k} finiment engendrée et de degré de transcendance 1. C'est bien connu (voir par exemple [Liu02]) que tout tel corps est le corps des fonctions d'une unique courbe algébrique normale et projective sur \widetilde{k} . On peut alors donner la définition suivante :

Définition 3.5. Soit x un point de la courbe k -analytique X . Le *genre* de x , qu'on note $g(x)$, est le genre de la courbe algébrique normale et projective sur \widetilde{k} de corps de fonctions $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$.

On remarque que, lorsque le corps k n'est pas algébriquement clos, une autre définition pour le genre de x est possible, notamment on pourrait définir $g(x)$ comme le genre au sens ci-dessus d'un antécédent y quelconque de x en $X_{\widehat{k}}$, où \widehat{k} est le complété d'une clôture algébrique de k . Les deux définitions étant différentes (il n'est pas toujours vrai que $\widetilde{\mathcal{H}(y)} = \widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{k}} \widehat{k}$), ce n'est pas claire quelle entre elles soit la meilleure.

Tout point de *type* (2) x de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est donc de genre 0, $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ étant comme on a dit une extension purement transcendante de \widetilde{k} et donc corps de fonctions de $\mathbb{P}_{\widetilde{k}}^1$. On peut en déduire que si X est une courbe analytique et $U \subset X$ est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{P}_k^{1,an}$, in particulier s'il est isomorphe à disque ouvert ou à une couronne ouverte, tout $x \in U$ est de genre 0.

3.3 Les analytifiés des courbes algébriques

Une des façons plus simples d'obtenir une courbe k -analytique X est comme analytifié d'une courbe algébrique \mathcal{X} sur k . En effet, grâce aux jolies propriétés du foncteur d'analytification, en analytifiant un schéma séparé et purement de dimension 1 on obtient une courbe k -analytique. De plus, X est compacte si et seulement si \mathcal{X} est une courbe propre, et alors on a tous les résultats de type GAGA.

On travaillera beaucoup avec courbes $X = \mathcal{X}^{an}$ où \mathcal{X} est une courbe algébrique plane, affine ou projective, par exemple quand \mathcal{X} est une courbe elliptique. Si $\mathcal{X} = \text{Spec}(k[X, Y]/I)$, dans X on a une autre courbe k -analytique, le domaine analytique $\mathcal{M}(k\{X, Y\}/I)$. Souvent ce dernier espace, qui correspond à la "boule unité" de X , est déjà très intéressant, mais il faut faire attention qu'il n'est pas du tout intrinsèque, il dépend de la choix d'un système de coordonnées.

Des exemples simples sont ceux qu'on a discuté dans le premier chapitre $\mathbb{A}_k^{1,an}$ et le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$. Aussi les tores $\mathbb{T} = \mathbb{G}_{m,k}^{an}/q^{\mathbb{Z}}$ sont courbes k -analytiques.

Algébrisation. On dit qu'un espace k -analytique X est *algébrisable* si il y a un schéma \mathcal{X} sur k tel que $X \cong \mathcal{X}^{an}$. On a déjà dit qu'on a les résultats de type GAGA pour les espaces propres ; on démontre aussi que tout espace k -analytique projectif est algébrisable (par un unique schéma projectif).

Pour les courbes c'est plus simple : on démontre que *toute courbe k -analytique propre est projective, et donc algébrisable.*

3.4 Un exemple fondamental : la courbe de Tate

Soit \mathcal{X} une courbe elliptique sur le corps k , i.e. une courbe algébrique projective et lisse sur k de genre 1 (avec un point 0 distingué, mais ça n'a pas d'importance pour le moment). On peut démontrer qu'une telle courbe est une variété abélienne, ce qui signifie qu'elle est munie d'une opération qui en fait un groupe (le point distingué 0 en est l'élément neutre). Par simplicité on peut supposer que la caractéristique de \tilde{k} est différente de 2 (et alors in celle de k aussi), de manière à ce que toute courbe elliptique \mathcal{X} de $\mathbb{P}_{\tilde{k}}^2$ soit définie par une équation de Legendre :

$$Y^2Z - X(X - Z)(X - \lambda Z) = 0$$

avec $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Après un changement de variables, on peut obtenir une équation de la même forme mais avec $0 < |\lambda| \leq 1$ et $|1 - \lambda| = 1$. Pour pouvoir utiliser cette caractérisation, dans le reste du chapitre on assume toujours la condition sur les caractéristiques.

On obtient la *réduction* $\tilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} modulo $k^{\circ\circ}$ en considérant la courbe définie sur \tilde{k} par l'équation qu'on a en réduisant les coefficients de 3.4 modulo

$k^{\circ\circ}$:

$$\widetilde{\mathcal{X}} = Proj \left(\frac{k[x, y]}{Y^2Z - X(X - Z)(X - \widetilde{\lambda}Z)} \right).$$

Cette équation définit encore une courbe elliptique si et seulement si $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{k} \setminus \{0, 1\}$, i.e. si et seulement si $|\lambda| = 1$. Dans ce cas on dit que \mathcal{X} a *bonne réduction*. Par contre si $0 < |\lambda| < 1$ la réduction $\widetilde{\mathcal{X}}$, étant définie par $Y^2Z = X^2(X - Z)$, n'est plus lisse et on dit alors que \mathcal{X} a *mauvaise réduction*.

Les courbes elliptiques définies sur des corps non archimédiens complets sont un sujet classique et bien étudié ; on peut trouver plus de détails par exemple dans le chapitre *VII* de [Sil09].

On donne une dernière définition qui nous sert seulement quand le corps k n'est pas algébriquement clos : on dit que une courbe elliptique a *réduction déployée* si les singularités de sa réduction sont au pire des points doubles ordinaires définis sur \widetilde{k} , et les tangents en ces points sont définies sur \widetilde{k} aussi. Vu que pour nous k sera presque toujours algébriquement clos on ne s'intéresse pas trop à ces problèmes sinon pour donner des exemples à la fin des chapitres suivants.

Comme l'on discutera plus tard, les courbes elliptiques ayants mauvaise réduction ont joué un rôle très important dans le développement de la théorie de Tate ; ça justifie la terminologie suivante :

Définition 3.6. Soit \mathcal{X} une courbe elliptique projective a mauvaise réduction (déployée) sur k . On appelle *courbe de Tate analytique* (plus simplement *courbe de Tate*) son analytifié $X = \mathcal{X}^{an}$.

De manière analogue, on appelle *courbe de Tate analytique affine* l'analytifié d'une courbe k -algébrique de la forme

$$Spec \left(\frac{k[x, y]}{y^2 - x(x - 1)(x - \lambda)} \right)$$

avec $0 < |\lambda| < 1$ (quand k est un corps quelconque, il faut aussi faire attention à que la réduction soit déployée).

3.5 L'uniformisation de la courbe de Tate

L'étude des courbes elliptiques à mauvaise réduction est ce qui a porté Tate à rechercher une définition de variété analytique sur les corps non-archimédiens et donc à développer la théorie des espaces analytiques rigides. Ce qu'il suggère que ça doit exister une définition globale de variété analytique sur \mathbb{Q}_p est un fait qu'il démontre en 1959.

C'est bien connu et pas trop compliqué à démontrer par des calculs explicites que toute courbe elliptique complexe E peut s'écrire comme quotient \mathbb{C}/Λ du corps \mathbb{C} par un réseau. On appelle ça *uniformisation* de la courbe

elliptique E . En composant avec la fonction exponentielle on obtient une version multiplicative de l'uniformisation :

$$E \cong \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}.$$

Tate remarque que le même calculs marchent sur le corps \mathbb{Q}_p par les courbes à mauvaise réduction. Ce qu'il démontre précisément est que si E est une courbe elliptique à mauvaise réduction sur un corps non archimédien et complète k , il existe $q \in k$, $|q| < 1$ et après une extension finie séparable de scalaires un isomorphisme

$$E(k) \cong k^*/q^{\mathbb{Z}}.$$

Sur les complexes dans la pratique on utilise plus souvent l'uniformisation additive, mais ça n'a pas d'analogue sur un corps non archimédien, parce que on n'a pas une bonne théorie des réseaux. Par exemple, \mathbb{Q}_p n'a pas de sous-groupes discrets non triviaux.

Avoir une uniformisation est toujours très utile ; par exemple on peut voir tout de suite les points de n -torsion de la courbe E .

Au début la preuve de ce résultat a été obtenue par Tate par des “*formules brutales*”¹, mais avec les instruments de la géométrie k -analytique on peut donner une seconde preuve qui aide à mieux comprendre la nature de ces courbes.

En suivant les idées du paragraphe 9.7 de [BGR84], en le traduisant dans le langage de la géométrie de Berkovich, on peut démontrer sans utiliser aucun résultat avancé de la théorie des courbes elliptiques la caractérisation suivant des courbes de Tate :

Théorème 3.7. *Si X est une courbe de Tate sur un corps algébriquement clos, il existe un unique $q \in k$, $0 < |q| < 1$, tel qu'on ait un isomorphisme de groupes analytiques*

$$X \cong \mathbb{G}_{m,k}^{an}/q^{\mathbb{Z}}.$$

Réciproquement, tout quotient comme ci-dessus est une courbe de Tate.

On va donner dans la suite une esquisse de la preuve. Comme dans la littérature, on se limite par simplicité au cas où le corps k est algébriquement clos. On note i une racine carrée de -1 en k .

Soit X l'analytifié de la courbe elliptique projective définie sur k par

$$y^2z - x(x-z)(x-\lambda z),$$

avec $0 < |\lambda| < 1$. Si on prends λz comme nouvelle indéterminé à la place de z on obtient l'équation

$$y^2z - x(x-z)(\lambda x - z) = 0,$$

1. au moins, c'est l'opinion de Grothendieck! Il été au début très sceptique à propos des idées de Tate sur l'existence d'une définition globale de variété analytique non archimédienne, comme on peut lire dans [GSC01, Lettre du 18.08.1959].

d'où on voit facilement que la réduction de X est la réunion des deux courbes d'équations $y^2 + x(x - z) = 0$ et $z = 0$. En changeant encore de coordonnées, prenant $z - 2iy - 2x$ et $z - 2iy + 2x$ (sont les équations des tangentes à $y^2 + x(x - z) = 0$ en ses intersection avec $z = 0$) respectivement à la place de x et y , l'équation de la courbe devient

$$(xy - z^2)z - \lambda F(x + y, z) = 0,$$

où F est le polynôme homogène de degré 3 suivant :

$$F(a, b) = \frac{1}{16}a^3 + \frac{1}{8}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + \frac{1}{2}b^3.$$

Cette nouvelle forme a l'avantage que la courbe est maintenant contenue dans $U_0 \cup U_1$, où $\{U_0, U_1, U_2\}$ est le recouvrement standard de l'espace projectif, formé par trois ouverts définis par $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$ respectivement. On note alors $X_i = X \cap U_i$, de façon telle que $X = X_0 \cup X_1$.

On démontre dans [BGR84][9.7.1] par des calculs astucieux que X_0 est une couronne fermée, isomorphe à $\mathcal{M}(k\{T, |\lambda|T^{-1}\})$ et relativement à cet isomorphisme l'intersection $X_0 \cap X_1$ est la réunion disjointe des deux parties $X_0^+ = \mathcal{M}(k\{T, T^{-1}\})$ (points avec $|T| = 1$) et $X_0^- = \mathcal{M}(k\{|\lambda|^{-1}T, |\lambda|T^{-1}\})$ ($|T| = |\lambda|$). La même chose est vraie pour X_1 , de telle façon que X peut s'obtenir abstraitement à partir de X_0 et X_1 en identifiant X_0^- avec X_1^- et X_0^+ avec X_1^+ .

On veut utiliser cet point de vue pour construire le recouvrement universel de X . Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on considère une copie V_{2i} de X_0 et une copie V_{2i+1} de X_1 , avec V_{2i}^+ et V_{2i}^- les parties de V_{2i} qui correspondent à X_0^+ et X_0^- respectivement, et de même pour V_{2i+1}^+ et V_{2i+1}^- dans V_{2i+1} . Finalement, on appelle V l'espace k -analytique que on obtient en recollant les V_i le long les isomorphismes $V_{2i}^+ \cong V_{2i+1}^-$ et $V_{2i}^- \cong V_{2i-1}^+$; c'est une chaîne de copies des courbes X_0 et X_1 .

Ce qu'on veut maintenant démontrer est que V est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$. On écrit $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} W_n$, où l'on note $W_n := \cup_{i=1-n}^n V_n$; on prouve que les W_n , obtenus en recollant des couronnes, sont encore des couronnes. Ici il faut faire attention : il n'est pas toujours vrai qu'une réunion croissante de couronnes est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$. Par exemple, si on enlève de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ deux points de *type* (4), ce qui reste est clairement réunion croissante de couronnes, sans être isomorphe au groupe multiplicatif. Ici, les couronnes ne peuvent pas "croître assez", car les deux points de *type* (4) qu'on a enlevé sont a "distance finie". Mais il ne suffit même pas que les deux points qu'on enlève soient a distance infinie : $\mathbb{P}_k^{1,an}$ moins un point de *type* (1) et un de *type* (4) est un contre-exemple.

Dans notre cas tout se passe bien parce que on démontre ([BGR84, 9.7.2]) que les W_n sont isomorphes aux couronnes $\mathcal{M}(k\{\lambda^{-n}T, \lambda^n T^{-1}\})$ et tels isomorphismes sont compatibles avec les inclusions $W_n \hookrightarrow W_{n+1}$. Plus précisément, on démontre qu'il existe une fonction analytique f sur V , unique à

un élément près de k° , telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T \mapsto f|_{W_n}$ induit un isomorphisme entre W_n et $\mathcal{M}(k\{\lambda^{-n}T, \lambda^n T^{-1}\})$; tels isomorphismes sont alors compatibles.

Identifiant donc chacune couronne W_n avec son l'image $E(0, |\lambda|^{-n}) \setminus E(0, |\lambda|^n)^-$ dans $\mathbb{P}_k^{1,an}$ on voit aussitôt que leur réunion V est $\mathbb{A}_k^{1,an} \setminus \{0\}$ (isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$), car elle coïncide avec la réunion des boules $E(O, |\lambda|^{-n})$, qui est $\mathbb{A}_k^{1,an}$, moins l'intersection des $E(0, |\lambda|^n)^-$, qui est le singleton $\{0\}$.

C'est maintenant le moment de retrouver la courbe X à partir de V . L'idée est qu'on veut écrire X comme quotient de $V \cong \mathbb{G}_{m,k}^{an}$. On obtient X en identifiant tout V_{2i} entre eux et tout V_{2i+1} entre eux; on définit alors une application $\varphi : V \rightarrow V$ en recollant tous les isomorphismes canoniques $V_i \rightarrow V_{i-2}$. On peut définir une autre application $\phi : V \rightarrow V$ recollant les isomorphismes $V_i \rightarrow V_{i+2}$ qu'on obtient via "multiplication par λ^{-2} " au niveau de $\mathcal{O}_V(V_{i-2}) \rightarrow \mathcal{O}_V(V_i)$. Alors, pour tout entier i , $\varphi \circ \psi|_{V_i}$ est un automorphisme de V_i , donc envoie la fonction f de tout à l'heure sur une autre fonction f' analytique sur V avec les mêmes propriétés. Mais on a dit que une telle fonction est unique à multiplication par un élément a de k° près, donc $f' = af$. On a alors $\varphi^*(f) = (\psi^*)^{-1}(af) = a\lambda^2 f$, donc φ est la multiplication par $a\lambda^2$.

La courbe X est donc le quotient de V par la multiplication par $a\lambda^2$. On obtient :

Théorème 3.8. *La courbe X est isomorphe à un tore analytique $\mathbb{G}_{m,k}^{an}/q^{\mathbb{Z}}$.*

On remarque que q satisfait $|q| = |\lambda|^2$.

On peut rendre ce théorème un peu plus précis en donnant une expression pour q . Pour le faire, on modifie un peu notre construction, on pose $\mathcal{A} = k\{s^{-1}T, rT^{-1}\}$ avec $r, s \in |k|$, $0 < r \leq s < 1$. On construit un espace géométrique qui paramétrise plusieurs courbes de Tate associées à différents λ en considérant le sous espace \mathcal{X} de $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}^2 = \mathbb{P}_k^2 \times_k \mathcal{M}(\mathcal{A})$ défini par $(xy - z^2)z - \Lambda F(x + y, z) = 0$, où $\Lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est le nouveau paramètre. L'espace $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est la couronne fermée définie par $r \leq |T| \leq s$, \mathcal{X} est donc la famille des courbes elliptiques avec paramètre $r \leq |\lambda| \leq s$. On peut alors appliquer un argument de continuité en faisant varier la courbe X dans la famille (a doit alors être une unité comme fonction de λ) et on trouve que q comme fonction de λ est donné par une série

$$q(\lambda) = \sum_{i=2}^{\infty} c_i \lambda^i,$$

avec les $c_i \in k^\circ$ et $|c_2| = 1$.

Grâce à cette expression explicite, on peut voir qu'elle donne une surjection de $\{t \in k \text{ t.q. } 0 < |t| < 1\}$ dans soi même, donc tout tore $\mathbb{G}_{m,k}^{an}/q^{\mathbb{Z}}$ est une courbe elliptique. Finalement, on démontre ([BGR84, 9.7.5]) que si deux

tores analytiques $\mathbb{G}_{m,k}^{an}/q_1^{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{G}_{m,k}^{an}/q_2^{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes alors $q_1 = q_2$, et on conclut la preuve du théorème.

Remarque 3.9. Cette démonstration n'utilise pas les jolies propriétés de la topologie des espaces k -analytiques ; on pourrait si l'on veut rester dans le cadre des espaces analytiques rigides. Ce que l'approche de Berkovich nous donne ici est une interprétation plus géométrique de cette situation. L'espace $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$ est simplement connexe et il est en effet le recouvrement universel de la courbe de Tate. On peut donc avec la théorie des espaces k -analytiques étudier ces espaces avec des véritables instruments de topologie algébrique.

3.6 L'homotopie de la courbe de Tate

Comme l'on vient de dire, on n'a pas vraiment eu besoin de la théorie de Berkovich pour obtenir l'uniformisation. Cependant, on peut s'en servir pour obtenir une deuxième caractérisation des courbes de Tate sur un corps k algébriquement clos.

Soit X l'analytifié de la courbe elliptique suivante :

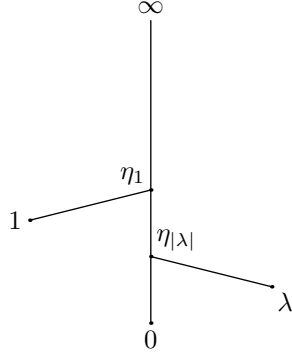
$$\text{Spec} \left(\frac{k[x, y]}{y^2 - x(x-1)(x-\lambda)} \right),$$

avec $0 < |\lambda| \leq 1$ et $|1 - \lambda| = 1$. On a dit que toute courbe elliptique peut s'écrire ainsi, et on sait que X est une courbe de Tate si et seulement si $|\lambda| < 1$.

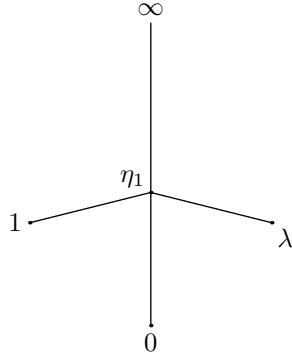
On peut considérer la projection sur la coordonnée x , qui est l'application k -analytique $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,an}$ obtenue en analytifiant l'application $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ induite par le morphisme d'anneaux évident $k[x] \rightarrow k[x, y]/(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))$. Pour garder une analogie avec la géométrie qu'on est habitué à traiter, on peut penser à cette application comme à un recouvrement, avec ramification au-dessus de $0, \lambda, 1$, à deux feuillets de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. En effet cette analogie est tout à fait correcte grâce aux théorèmes de type GAGA. Comme en géométrie algébrique, on peut donc étudier l'application π comme un recouvrement de degré 2, et on a en particulier pour π la formule suivante, qui nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{A}_k^{1,an} \setminus \{0, \lambda, 1\}$:

$$\sum_{y \in \pi^{-1}(x)} [\mathcal{H}(y) : \mathcal{H}(x)] = 2. \quad (1)$$

Soit maintenant $\Gamma \subset \mathbb{A}_k^{1,an}$ la réunion des segments qui relient les points $0, 1, \lambda$ et ∞ entre eux. Selon que $|\lambda| < 1$ ou $|\lambda| = 1$ la forme de Γ est



ou



Le complémentaire de Γ dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est réunion disjointe des disques ouverts $E(a, r_a)^-$ avec $a \in k \setminus \{0, 1, \lambda\}$ et $r_a = \min\{|a|, |a - 1|, |a - \lambda|\}$. Chacun $E(a, r_a)$ peut se rétracter sur son bord η_{a, r_a} , qui est un point de Γ ; il s'en suit que Γ est un rétract de déformation fort de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ (bien-sûr Γ lui même est contractile, ce qui concorde avec le fait qu'on a démontré que $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est contractile). Or, dans $E(a, r_a)^-$ il y a déjà les racines carrées de tout facteur linéaire de $x(x - 1)(x - \lambda)$ (on rappelle que vu que la caractéristique de \tilde{k} est différent de deux, $1 + u$ est un carré lorsque la fonction u sur l'espace k -analytique Y satisfait $|u(y)| < 1$ pour tout $y \in Y$, la série de Taylor usuelle étant convergente) donc $\pi^{-1}(E(a, r_a)^-)$ est réunion disjointe de deux boules ouvertes qui se recollent le long de leur bords sur $\pi^{-1}(\Gamma)$ et qui peuvent donc se rétracter sur lui. La courbe k -analytique X peut donc se rétracter sur $\pi^{-1}(\Gamma)$. Pour étudier ce dernier, on peut commencer par considérer l'image réciproque des points η_r , avec $r < |\lambda| \leq 1$. On remarque que $1 - x(\eta_r)$ est un carré car $|x(\eta_r)| = r < 1$, et de même $\lambda - x(\eta_r) = \lambda(1 - x(\eta_r))/\lambda$ est un carré car λ est un carré (k est algébriquement clos) et $|x(\eta_r)/\lambda| < 1$. Soit P un antécédent de η_r , on a $y(P)^2 = x(P)(x(P) - 1)(x(P) - \lambda) = x(P) \cdot (\text{carré})$. Il y a alors deux cas :

- Si $r \notin |k^*|$, alors $|\mathcal{H}(\eta_r)^*|$ est engendré par k^* et r , mais $|x(P)| = |x(\eta_r)| = r$ donc $|y(P)/\sqrt{\text{carré}}| = \sqrt{r} \in |\mathcal{H}(P)^*|$ et donc $[\mathcal{H}(P)] :$

$\mathcal{H}(\eta_r)] \geq 2$.

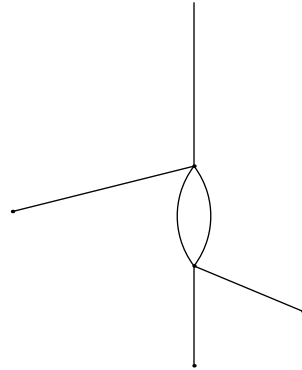
- Si $r \in |k^*|$, soit $\mu \in k$ avec $|\mu| = r$, et soit $T = x(\eta_r)/\mu$. On a $|T| = 1$, donc $\mathcal{H}(\eta_r) = \widetilde{k}(T)$, et $(y(P)/\sqrt{\mu})^2 = T$ et donc $\mathcal{H}(P)$ contient une racine de T ; on obtient la même conclusion, $[\mathcal{H}(P) : \mathcal{H}(\eta_r)] \geq 2$.

Dans le deux cas on déduit par la formule 1 que le point P est l'unique antécédent de η_r : tout point du segment qui relie 0 à $\eta_{|\lambda|}$ a donc un seul antécédent en X .

De manière analogue, tout point des segments entre 1 et η_1 , entre λ et $\eta_{|\lambda|}$ ou du segment de η_1 vers l'infini a un unique antécédent par π (par exemple en η_r avec $r > 1$ alors $x(\eta_r)(x(\eta_r) - 1)(x(\eta_r) - \lambda) = x^3(1 - 1/x(\eta_r))(1 - \lambda/x(\eta_r)) = x(\eta_r) \cdot (\text{carré})$ comme dans le premier cas). En particulier si $|\lambda| = 1$ alors π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(\Gamma) \cong \Gamma$ et donc la courbe X est contractile.

Si par contre $|\lambda| < 1$, il nous reste à étudier l'image réciproque d'un dernier segment, celui reliant $\eta_{|\lambda|}$ au point de Gauss η_1 . Il s'agit des points η_r avec $\lambda < r < 1$; dans ce cas $x - 1$ est un carré et $x(x - \lambda) = x^2(1 - \lambda/x)$ est un carré, donc on a deux antécédents pour η_r .

L'image réciproque $\pi^{-1}(\Gamma)$ est alors de cette forme :



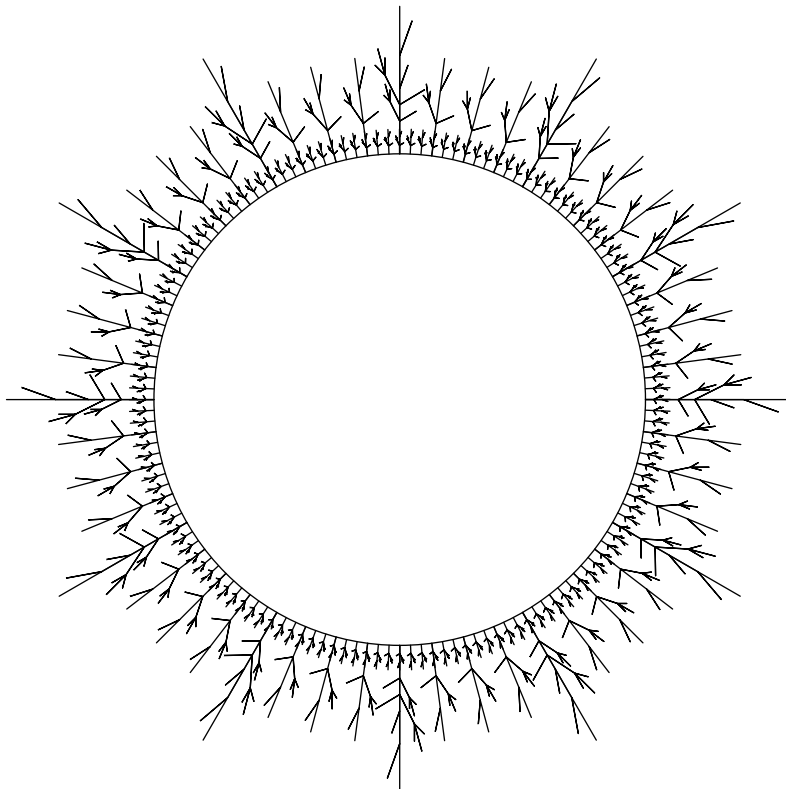
C'est homotope à un cercle !

On a donc démontré le résultat suivante :

Proposition 3.10. *Soit X l'analytifié d'une courbe elliptique sur un corps algébriquement clos. Alors si X est une courbe de Tate elle est homotope à un cercle, sinon elle est contractile.*

On peut donc visualiser la courbe de Tate comme dans le dessin qui suit ; c'est un cercle et de tout point du cercle aboutisse une branche isomorphe à

un disque de $\mathbb{P}_k^{1,an}$:



Remarque 3.11. On peut retrouver l'homotopie de la courbe de Tate aussi en partant de son uniformisation. Soit $X = \mathbb{G}_{m,k}^{an}/q^{\mathbb{Z}}$ une courbe de Tate ; on peut encore une fois identifier $\mathbb{G}_{m,k}^{an}$ avec $\mathbb{P}_k^{1,an} \setminus \{0, \infty\}$ et alors on obtient X en partant de la couronne fermée $C = E(0, 1) \setminus E(0, |q|)^-$ en identifiant $C^1 = E(0, 1) \setminus E(0, 1)^-$ avec $C^2 = E(0, |q|) \setminus E(0, |q|)^-$. Si on note $\pi : C \rightarrow X$ la projection correspondante et l l'unique chemin entre les deux bouts de la couronne C , on remarque que l'évidente rétraction de C sur l induit une rétraction de X sur $\pi(l)$, et ce dernier est un cercle. Ce raisonnement est bien sûr impossible si on se limite au cadre de la géométrie rigide.

Il est mieux de donner la parole Berkovich lui même à propos de ce résultat, qu'il a obtenu en 1986, au début du développement de sa théorie :

“ Thus, the analytic curve E^{an} is contractible if $|\lambda| = 1$, and homotopy equivalent to a circle if $|\lambda| < 1$. It is well known that these two cases correspond to those when the modular invariant $j(E)$ is integral or not. But the latter case $|j(E)| > 1$ is precisely that of a Tate elliptic curve. Wow, such a curve is homotopy equivalent to a circle ! I was always fascinated by Tate elliptic curves, but never understood the reason for which they admit uniformization. And here I had a very elementary explanation of this astonishing phenomenon discovered by Tate [...]. Of course, all this strongly lifted

up my spirit and eagerness in exploration of the new spaces. ” [Ber08]

Si le corps k n'est pas algébriquement clos, cet résultat n'est pas toujours vrai : on va expliquer ce qui se passe dans le prochain chapitre, à l'aide d'un nouvel instrument, la théorie de la réduction des espaces analytiques.

4 Réduction et type d'homotopie des courbes

Dans ce chapitre on va voir comment on peut visualiser les courbes analytiques à l'aide du théorème de réduction semi-stable. Comme instrument fondamental, on se servira de la théorie de la réduction d'un espace analytique.

On va expliquer ce que Berkovich démontre au paragraphe 4.3 de [Ber90] : le type d'homotopie de l'analytifié d'une courbe algébrique peut se lire dans la fibre spéciale du modèle semi-stable. Plus précisément, si \mathcal{X} est une courbe algébrique alors le graphe d'incidence de la fibre spéciale de son modèle semi-stable se plonge naturellement dans la courbe analytique \mathcal{X}^{an} , et son image est un rétract par déformation forte de \mathcal{X}^{an} .

4.1 Réduction d'un espace analytique

La théorie de la réduction, qui n'a pas d'analogue en géométrie analytique complexe, est un instrument fondamental pour l'étude des espaces analytiques rigides et des espaces k -analytiques de Berkovich ; on va s'en servir souvent pendant le reste du mémoire.

Ce qu'on veut faire c'est associer à tout espace k -analytique séparé un schéma \tilde{X} réduit et localement de type fini sur \tilde{k} , avec une *application de réduction*

$$\pi : X \rightarrow \tilde{X}.$$

Réduction d'un espace strictement affinoïde. On commence avec le cas où X est un espace affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, spectre d'une algèbre strictement k -affinoïde \mathcal{A} . On veut "réduire" les éléments de \mathcal{A} pour obtenir une \tilde{k} -algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$. On se rappelle que sur \mathcal{A} on a la semi-norme sup, et on définit alors :

$$\mathcal{A}^\circ = \{f \in \mathcal{A} \text{ t.q. } |f|_{sup} \leq 1\};$$

c'est un sous-anneau de \mathcal{A} , et

$$\mathcal{A}^{\circ\circ} = \{f \in \mathcal{A} \text{ t.q. } |f|_{sup} < 1\}$$

en est un idéal.

On note par $\tilde{\mathcal{A}}$ le quotient $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$. Clairement $\tilde{\mathcal{A}}$ est une \tilde{k} -algèbre de type fini, et (la semi-norme sup étant "power-multiplicative") réduite. On a obtenu enfin le schéma affine

$$\tilde{X} = \text{Spec}(\tilde{\mathcal{A}}),$$

réduit et de type fini.

Pour définir l'application de réduction, on remarque que si x est un point de X alors l'homomorphisme d'évaluation $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$ induit un homomorphisme d'anneaux $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{H}(x)^\circ$ qui en passant au quotient définit un homomorphisme de \tilde{k} -algèbres $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$. Le noyau de ce dernière flèche est

un idéal premier de $\tilde{\mathcal{A}}$, donc un point de \tilde{X} . On définit ainsi l'application de réduction $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$. On en donne tout de suite une première facile propriété :

Lemme 4.1. *L'application de réduction $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ est anticontinue, ce qui signifie que l'image réciproque d'une partie ouverte est fermée et l'image réciproque d'une partie fermée est ouverte.*

Démonstration. Une base pour les fermés de \tilde{X} étant formée par les ensembles $V(\tilde{f})$ (lieu des zéros de \tilde{f} , i.e. idéaux premiers de $\tilde{\mathcal{A}}$ qui contiennent \tilde{f}) pour $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{A}}$, il suffit de montrer que l'image réciproque d'un tel fermé est ouverte. Si $f \in \mathcal{A}^\circ$ est un relèvement de \tilde{f} , il suit de les définitions que $|\tilde{f}(x)| = 0$ si et seulement si $|f(x)| < 1$ et $\pi^{-1}(\tilde{f}) = \{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| < 1\}$; et clairement le dernier ensemble est ouvert et il ne dépend pas du relèvement choisi. \square

Exemple 4.2. Si $\mathcal{A} = k\{T\}$, afin que $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit la boule unité fermée $E(0, 1)$ de $\mathbb{A}_k^{1,an}$, on voit aussitôt que $\mathcal{A}^\circ = k^\circ\{T\}$, $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{k}[T]$, donc la réduction \tilde{X} n'est autre que la droite affine $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$ sur \tilde{k} . l'image réciproque par la réduction du fermée $\{\tilde{a}\}$ est l'ouvert $\pi^{-1}(\tilde{a}) = E(a, 1)^-$, où a est l'unique relèvement de \tilde{a} dans $E(0, 1)$; de manière cohérente avec le lemme précédent l'image réciproque d'un fermée de $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$ (qui est une réunion finie de points fermés) est donc une partie ouverte.

Cet premier exemple très simple nous montre que la réduction se comporte ici assez bien, au niveau de k -points l'application de réduction est la réduction usuelle $k^\circ \rightarrow \tilde{k}$.

De manière analogue on montre que la réduction de la boule unité dans l'espace affine analytique n -dimensionnel sur k est l'espace affine n -dimensionnel sur \tilde{k} .

Dans l'exemple ci-dessus, en partant d'une espace k -analytique irréductible on a obtenu un schéma irréductible. Ce n'est pas toujours le cas, en effet $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est irréductible si et seulement si \mathcal{A} est un domaine d'intégrité, donc si et seulement si la semi-norme sup est multiplicative, i.e. si et seulement si $|\cdot|_{sup} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. C'est en fait le cas pour la boule unité fermée de $\mathbb{A}_k^{1,an}$: la semi-norme $|\cdot|_{sup}$ coïncide avec le point de Gauss de $\mathbb{A}_k^{1,an}$; mais c'est faux en général, comme on peut voir tout de suite :

Exemple 4.3. Soit $\mathcal{A} = k\{T, aT^{-1}\}$, où $a \in k$ a valeur absolue strictement plus petit que 1. L'affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ correspond alors à la couronne de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ définie par les inégalités $|a| \leq |T| \leq 1$. En écrivant \mathcal{A} comme $k\{S, T\}/(ST - a)$ on voit aussitôt que la réduction de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est le schéma affine $\text{Spec}(k^\circ[S, T]/(ST))$, union de deux droites affines, définie respectivement par $S = 0$ et par $T = 0$, qui se coupent en un point double.

On recueille dans la proposition suivante d'autres propriétés utiles de la réduction qu'on ne démontre pas :

Proposition 4.4. *Soit $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espace strictement affinoïde, et soit $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ sa réduction.*

- (i) *L'application π est surjective.*
- (ii) *Si η est un point générique de \tilde{X} alors il y a un unique $x \in X$ tel que $\pi(x) = \eta$, et si $|\mathcal{A}|_{sup} = |k|$ alors $\kappa(\eta) \cong \widehat{\mathcal{H}}(x)$.*

Pour la preuve, qui utilise aussi un résultat de Tate ([BGR84, 7.1.5/4]), s'éloignant trop de la route qu'on prend dans ce mémoire, on renvoie à [Ber90, Prop. 2.4.4] ; on se contente de remarquer que c'est cohérent avec ce qu'on a dit en discutant l'exemple 4.2 : on a déjà dit que l'image réciproque d'un point fermé n'est pas vide (elle est une boule ouverte de rayon 1), l'unique point de $E(0, 1)$ envoyé par la réduction sur le point générique de \mathbb{A}_k^1 est le point de Gauss (qui on voit bien être l'unique point qui reste).

Remarque 4.5. On peut dire que dans l'exemple précédent le point de Gauss se comporte un peu comme un "point générique" de l'espace analytique ; de plus, ce point se conduit d'une certaine façon comme le "bord" de la boule. En effet, lorsque $\mathcal{A} \neq 0$ l'ensemble des images réciproques par la réduction des points génériques de \tilde{X} coïncide avec le *bord de Shilov* de X , le plus petit fermé de X sur lequel tout élément de \mathcal{A} atteint son maximum en norme.

Il n'y a pas des bords dans la théorie analytique de Tate : à cause de la particularité de la topologie non archimédienne, une notion naïve de bord n'a pas beaucoup de sens dans la géométrie k -analytique. Par exemple, on pourrait vouloir définir naïvement le bord de la boule fermée $E(c, r)$ de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ comme l'ensemble des points x avec $|c - x| = r$, mais ça dépend du centre c , et non de la boule. L'existence d'un bord est une particularité de la Théorie de Berkovich. Sans aucun détail, on peut remarquer que dans l'exemple 4.2 le point de Gauss est l'*unique point qui n'est contenu dans aucune boule unité ouverte centré en k°* ; pour une définition précise et une discussion plus approfondie on recommande 2.4.5 de [Ber90].

De manière analogue, on pourrait montrer que dans le cas de 4.3 le point de la couronne $\mathcal{M}(k\{S, T\}/(ST - a)) = \{|a| \leq |T| \leq 1\}$ qui est envoyé par l'application de réduction vers le point générique de la droite $\{S = 0\}$ (respectivement $\{T = 0\}$) est le point η_{Gauss} (respectivement $\eta_{0,|a|}$).

Réduction d'un espace k -analytique séparé quelconque. Si X est un espace k -analytique séparé quelconque, pour définir une réduction il faut un peu plus de prudence. En effet, il n'y a pas une réduction canonique pour les espaces non affinoïdes. Malheureusement l'idée naïve de recouvrir X par

affinoïdes et recoller leurs réductions ne peut pas marcher toujours car on sait comme recoller des schémas affines seulement le long des parties ouvertes. On a donc besoin d'un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X par des affinoïdes stricts tels que pour tout couple $i, j \in I$ le morphisme induit $\widetilde{U_i \cap U_j} \rightarrow \widetilde{U_i}$ soit une immersion ouverte. On appelle un tel recouvrement de X *recouvrement formel*.

Dans la pratique, pour que un recouvrement de X par des affinoïdes $\{U_i = \mathcal{M}(\mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ soit formel il faut et suffit d'avoir pour toute couple d'indices $i, j \in I$ des fonctions analytiques $f_{i,j,l} \in \mathcal{A}_i^\circ$ tels que $U_i \cap U_j = \{x \in U_i \text{ t.q. } |f_{i,j,l}(x)| \leq 1 \forall l\}$ (regarder la preuve du lemme 4.1). Deux recouvrements formels de X sont dits *équivalents* si leur réunion est encore un recouvrement formel de X . On appelle *variété analytique formelle* une couple (X, \mathcal{U}) , où X est un espace k -analytique séparé avec un recouvrement formel maximal \mathcal{U} donné (ou, de manière équivalente, une classe d'équivalence de recouvrements formels fixée).

Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement formel de X , ce qu'on obtient en recollant les réductions $\widetilde{U_i}$ est donc un schéma réduit et localement de type fini $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$, qui dépend du choix d'un recouvrement formel \mathcal{U} ; on l'appelle *réduction de X relative au recouvrement formel \mathcal{U}* . S'il n'y a pas risque de confusion on écrira simplement \widetilde{X} à la place de $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$. Les applications de réduction $U_i \rightarrow \widetilde{U_i}$ se recollent aussi et on obtient ainsi l'application de réduction $\pi : X \rightarrow \widetilde{X}$.

On démontre que les réductions associées à deux recouvrements équivalents sont la même; on peut donc parler de la réduction (canoniquement définie) d'une variété analytique formelle.

Exemple 4.6 (Réduction de $\mathbb{P}_k^{1,an}$). Un premier exemple de recouvrement formel est le recouvrement de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ par les deux affinoïdes de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ U_1 et U_2 définies respectivement par les équations $|T| \geq 1$ et $|T| \leq 1$, car leur intersection est $U_1 \cap U_2 = \{x \in U_1 \text{ t.q. } |T(x)| \leq 1 \text{ et } |T^{-1}(x)| \leq 1\}$.

On obtient la réduction $\widetilde{\mathbb{P}_k^{1,an}}$ en recollant les deux $\widetilde{U_i}$, qui sont deux droites affines sur \widetilde{k} (4.2), le long du complémentaire de l'origine (c'est l'ouvert qui correspond à la condition $|T| = 1$ et $|T^{-1}| = 1$ respectivement, en échangeant l'orientation (parce que l'isomorphisme sur l'intersection est $T \mapsto T^{-1}$). L'origine de la droite affine $\widetilde{U_2}$ est donc le point à l'infini qu'on rajoute à la droite affine $\widetilde{U_1}$: on obtiens alors comme réduction \widetilde{X} la droite projective sur \widetilde{k} .

Exemple 4.7 (Réduction du groupe multiplicatif). Soit $X = \mathbb{G}_{m,k}^{an}$ le groupe multiplicatif de k , et soit $q \in k^*$ avec $|q| < 1$. Le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ où U_i est la couronne fermée définie par $|q^i| \leq |T| \leq |q^{i-1}|$. La réduction $\widetilde{U_i}$ est alors formée par deux droites affines d_i^1 et d_i^2 sur k avec intersection exactement un point P_i (c'est 4.3), et $\widetilde{U_i}$ et $\widetilde{U_{i+1}}$ se recollent identifiant comme dans l'exemple précédent $d_i^2 \setminus \{P_i\}$ avec $d_{i+1}^1 \setminus \{P_{i+1}\}$.

La réduction \widetilde{X} est alors une chaîne infinie de droites projectives sur \widetilde{k} , telles que chacune coupe la suivante transversalement.

Exemple 4.8 (Réduction d'une courbe de Tate). Si la valuation de k est discrète, le cas d'une courbe de Tate $X = \mathbb{G}_{m,k}^{an}/q^{\mathbb{Z}}$ est facile à étudier à partir de l'exemple précédent. Soit π une uniformisante de k° , et soit $t > 1$ la valuation de q . En considérant alors le recouvrement de l'exemple précédent, on note que la multiplication par q agit en identifiant tout U_i avec U_{i+t} . La réduction de X est donc une chaîne de t droites projectives qui se referme (la t -ème droite intersecte la première), telles que chacune coupe la suivante et la précédente transversalement.

Liens avec les schémas formels. Il y a comme le nom suggère des liens entre recouvrements formels et schémas formels. On le résume brièvement dans ce paragraphe.

Un *modèle formel* de l'espace k -analytique X est un k° -schéma formel \mathcal{X} ayant fibre générique \mathcal{X}_η égal à X . Si \mathcal{X} est un modèle formel l.t.t.f. (*localement topologiquement de type fini*) de X , on obtient alors une variété analytique formelle \mathcal{X}^{f-an} en munissant X de la classe du recouvrement engendré par les images réciproques des sous-domaines formels de \mathcal{X} par la projection naturelle $p : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}$.

Malheureusement, il y a des recouvrements formels qui ne viennent pas d'un modèle formel. En effet, on peut montrer que tout recouvrement \mathcal{U} qui vient d'un modèle formel à fibre spéciale réduite est *distingué*, i.e. pour tout $U = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \in \mathcal{U}$ la norme spectrale sur \mathcal{A} est la norme résiduelle pour un épimorphisme $k\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$. De plus, une variété analytique formelle (X, \mathcal{U}) peut s'obtenir à partir de différents modèles formels (schémas formels ayant même fibre générique mais fibres spéciales différentes).

On peut énoncer les propriétés de cette correspondance dans un langage catégoriel :

Proposition 4.9. *L'application $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{f-an}$ est fonctorielle, et induit une équivalence de catégories entre schémas formels \mathcal{X} l.t.t.f. et plats sur k° avec fibre spéciale \mathcal{X}_s réduite et variétés formelles analytiques distinguées. De plus, la fibre générique d'un schéma formel comme ci-dessus coïncide avec la réduction de la variété analytique formelle qui lui est associée.*

On ne donne pas la preuve de ce résultat, pour laquelle on peut voir 1.1 de [BL85]), mais c'est utile de décrire le foncteur inverse de $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{f-an}$, et de montrer quels problèmes peuvent apparaître si on essaie d'enlever des hypothèses; on pourrait ainsi aussi comprendre mieux le concept de recouvrement distingué.

Si Y est une variété analytique formelle, on peut considérer le faisceau \mathcal{O}° des fonctions analytiques de sup-norme ≤ 1 , sous-faisceau du faisceau des fonctions analytiques. Alors en recollant les schémas formels affines

$Spf(\mathcal{O}^\circ(U))$, où les U sont toutes les sous-variétés formelles affinoïdes de Y , on obtiens le schéma formel qu'on veut.

On voit maintenant facilement pourquoi un recouvrement affinoïde formel ne vient pas forcément d'un modèle formel l.t.t.f : $Spf(\mathcal{O}^\circ(U))$ n'est pas en général topologiquement de type fini sur k° .

Il y a une deuxième piège : la réduction de la variété analytique formelle \mathcal{X}^{f-an} ne coïncide pas toujours avec la fibre spéciale \mathcal{X}_s . En effet, si $\mathcal{X} = Spf(\mathcal{A})$, on a $\mathcal{X}_s = Spec(\mathcal{A}/k^\circ\mathcal{A})$ et $\widetilde{\mathcal{X}^{f-an}} = Spec((\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k)^\circ / (\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k)^\circ\mathcal{O}^\circ)$, et ceux deux ne sont pas toujours égaux si la norme sur $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k$ n'est pas une norme résiduelle. Si par contre le recouvrement est distingué, tout se passe bien et donc $\widetilde{\mathcal{X}^{f-an}} = \mathcal{X}_s$.

Un autre comportement pathologique peut apparaître lorsque on travaille avec des recouvrements non distingués : si X et Y sont deux espaces k -analytiques recouverts par deux recouvrements formels $\{X_i\}$ et $\{Y_j\}$ respectivement, alors $X \times Y$ est recouvert par les $X_i \times Y_j$, mais désagréablement on n'a pas toujours $\widetilde{X_i \times Y_j} = \widetilde{X_i} \times \widetilde{Y_j}$; et le même problème se présente pour une extension de scalaires. Ce problème n'existe pas si les deux recouvrements sont distingués et les deux réductions associés \widetilde{X} et \widetilde{Y} sont géométriquement réduites (cette dernière condition est bien-sûr automatiquement satisfaite lorsque k est algébriquement clos).

Heureusement, pour une classe assez grande d'espaces analytiques il n'y a pas des problèmes : *si l'espace analytique X est réduit et le corps k est algébriquement clos, tout recouvrement formel est distingué.*

4.2 Réduction semi-stable de courbes

Dans ce paragraphe on suppose que le corps k est algébriquement clos. Cette hypothèse est très forte mais elle nous permet de se débarrasser de beaucoup de problèmes techniques, on va parler de ce qui se passe dans le cas général seulement à la fin du paragraphe.

Avant de parler de réduction semi-stable, rappelons quelques définitions.

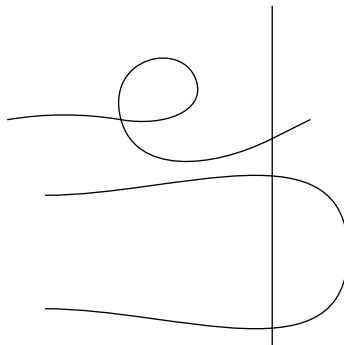
Une courbe algébrique X sur k est dite *semi-stable* si :

- (1) X est réduite ;
- (2) X a au pire points doubles ordinaires comme singularités ;
- (3) si X est de genre ≥ 1 , toute composante irréductible rationnelle de X isomorphe à \mathbb{P}_k^1 coupe la réunion des autres composantes en au moins deux points.

On rappelle que un point x de X est un *point double ordinaire* si le complété de son anneau local $\kappa(x)$ est isomorphe à $Spec(k[X, Y]/(XY))$. On rappelle aussi que une courbe irréductible sur k est *rationnelle* si son corps

des fonctions est isomorphe à $k(X)$, et que pour une courbe irréductible rationnelle être isomorphe à \mathbb{P}_k^1 est équivalent à être lisse.

Voici le dessin d'une courbe semi-stable :



Remarque 4.10. Dans ce mémoire on va parler de semi-stabilité et stabilité par des réductions de courbes analytiques, donc la première condition sera toujours automatiquement satisfaite.

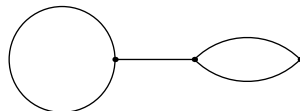
Une courbe semi-stable est dite *stable* si et on peut remplacer la dernière condition par la condition plus forte suivante :

- (3') toute composante irréductible rationnelle de X isomorphe à \mathbb{P}_k^1 coupe la réunion des autres composantes en au moins trois points.

Remarque 4.11. Pour des questions techniques on demande souvent qu'une courbe stable soit de genre au moins 2. Vu que nous n'avons pas besoin de cette propriété, en suivant la même convention que Berkovich nous ne mettons aucune restriction de genre. Ceci nous permet de simplifier un peu quelque énoncé dans la suite.

Si X est une courbe semi-stable, on peut lui associer son *graphe d'incidence* (ou *graphe dual*), le graphe qui a un sommet pour toute composante irréductible de X et pour tout point double ordinaire x une arête entre les composantes qui contiennent x (une boucle si x appartient à une seule composante). Il s'agit d'une façon simple de coder plusieurs informations sur la structure d'une courbe semi-stable.

Par exemple, voici le graphe d'incidence de la courbe qu'on a dessiné plus en haut :



En général on ne peut pas espérer que toute k -variété algébrique lisse et projective \mathcal{X} ait un modèle lisse ; il est beaucoup plus raisonnable lorsque \mathcal{X} est une courbe de se demander quand est-ce qu'on peut trouver un *modèle semi-stable*, i.e. un k° schéma propre avec fibre générique \mathcal{X} et fibre spéciale (réduction) semi-stable.

Un important théorème démontré par Deligne et Mumford nous assure en fait que toute courbe lisse, géométriquement connexe sur k et de genre plus grand ou égal à 2 a un modèle semi-stable, et un unique modèle stable. Pour une discussion plus approfondie voir le chapitre 10 de [Liu02], notamment le quatrième paragraphe pour le théorème de Deligne-Mumford. Dans le cas où le corps k n'est pas algébriquement clos, pour cet théorème (comme pour beaucoup d'autres résultats dans la suite du paragraphe) on a besoin d'une extension finie et séparable des scalaires ; on va aborder cette question à la fin.

Ce qui nous intéresse le plus c'est qu'il y a une version de ce théorème en géométrie analytique ; mais on rappelle ici que la réduction d'un espace analytique dépend du choix d'un recouvrement formel, donc on ne dira pas qu'une courbe "a" une réduction stable, mais que elle "admet" une réduction stable (resp. semi-stable, etc.) s'il existe un recouvrement formel qui nous donne une réduction avec la propriété voulue. S'il existe un tel recouvrement qui est de plus distingué, notre courbe admet un modèle formel avec réduction (i.e. fibre spéciale) ayant les bonnes propriétés. Voilà l'énoncé du théorème, dû à Bosch et Lütkebohmert (voir [BL85, théorème 7.1]) :

Théorème 4.12 (Théorème de réduction semi-stable, version analytique). *Soit \mathcal{X} une courbe algébrique lisse, géométriquement connexe, projective sur k , de genre $g \geq 1$. Alors \mathcal{X}^{an} admet un modèle formel (et donc algébrique) avec réduction stable. Si $g \geq 2$, un tel modèle est unique.*

En effet dans la suite du chapitre on se servira jamais de la dernière propriété de la réduction stable, ça va nous suffire de considérer un modèle avec réduction semi-stable. Signalons dès maintenant que l'on a unicité du modèle stable aussi dans le cas $g = 1$ quand la réduction \tilde{X} est lisse (i.e. sauf dans le cas des courbes de Tate). Les questions liées à l'unicité des modèles sont très intéressantes ; on va en parler dans le chapitre suivant, où l'on va aussi expliquer comment l'on peut démontrer le théorème 4.12 purement dans le langage de la géométrie de Berkovich.

Genre et réduction semi-stable Si \mathcal{X} est un modèle semi-stable de la courbe analytique X , on peut démontrer la formule suivante :

$$g = b(\mathcal{X}_s) + \sum_{1 \leq i \leq n} g(\mathcal{X}_{s,i}), \quad (2)$$

où g est le genre de X (1 moins sa caractéristique d'Euler), $b(\mathcal{X}_s)$ est le nombre de Betti du graphe associé à la réduction semi-stable \mathcal{X}_s et les $g(\mathcal{X}_{s,i})$ sont les genres des composantes irréductibles de cette réduction. Pour une preuve, voir le paragraphe 5 de [BL85].

On remarque que, par la deuxième partie de la proposition 4.4, le genre $g(\mathcal{X}_{s,i})$ de la courbe $\mathcal{X}_{s,i}$ coïncide avec le genre du point de *type* (2) $x_i = \pi^{-1}(\eta_i)$ de X .

4.3 Squelettes et type d'homotopie de courbes

Dans le cas des courbes on peut dire, à propos des images réciproques des points par la réduction, quelque chose de plus que en 4.4 (où on a décrit l'image réciproque d'un point générique). Dans le cas de l'exemple 4.2, toute boule ouverte $B(a, 1)^-$ centrée en k° est envoyée par π en \tilde{a} ; (plus précisément $\pi^{-1}(\tilde{a}) = B(a, 1)^-$), où a est un relèvement quelconque de \tilde{a} en k° . Le cas de la couronne de 4.3 est un peu plus compliqué parce que la réduction n'est irréductible ni lisse. On montre en se ramenant au cas précédent que l'image réciproque $\pi^{-1}(x)$ de l'unique point double par l'application de réduction est la couronne ouverte définie par $|a| < |T| < 1$ (qui est aussi l'unique morceau de branche qui parte de η_{Gauss} aussi bien que de $\eta_{0,|a|}$), alors que comme tout à l'heure l'image réciproque d'un point fermé est une boule ouverte.

C'est en fait un résultat général, comme nous assure la proposition suivante, qu'on énonce sans preuve en la traduisant dans le langage de la géométrie k -analytique, encore due à Bosch et Lütkebohmert :

Proposition 4.13 ([BL85, prop. 2.2 et prop. 2.3]). *Soit X une courbe k -analytique avec une réduction $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$, et soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$ un point fermé. Alors :*

- (i) *Le point \tilde{x} est non singulier si et seulement si l'image réciproque $\pi^{-1}(\tilde{x})$ est analytiquement isomorphe à la boule unité ouverte de $\mathbb{A}_k^{1,an}$.*
- (ii) *Le point \tilde{x} est double ordinaire si et seulement si l'image réciproque $\pi^{-1}(\tilde{x})$ est analytiquement isomorphe à la couronne ouverte définie par $r < |T| < 1$ dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$, pour un unique $r \in |k^*|$.*

Si on considère une courbe avec une réduction semi-stable, cette proposition et 4.4 nous permettent de connaître l'image réciproque de tout point de la réduction. On peut pour une courbe k -analytique lisse avec réduction semi-stable étudier plus précisément toutes ces images réciproques. On obtient la proposition suivante, qu'on exploite aussi pour fixer des notations :

Proposition 4.14 ([Ber90, 4.3.1]). *Soit X une courbe k -analytique avec une réduction semi-stable $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$, et soient \tilde{X}_i , $i \in I$, les composantes irréductibles de \tilde{X} . Soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Alors :*

- (i) *Si \tilde{x} est le point générique de \tilde{X}_i , il y a un unique point $x_i \in X$ tel que $\pi(x_i) = \tilde{x}$.*
- (ii) *Si \tilde{x} est un point non singulier de \tilde{X}_i , l'image réciproque $\pi^{-1}(\tilde{x})$ est analytiquement isomorphe à la boule unité ouverte de $\mathbb{A}_k^{1,an}$, et sa clôture est $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})} = \pi^{-1}(\tilde{x}) \cup \{x_i\}$.*
- (iii) *Si \tilde{x} est un point singulier de X , l'image réciproque $\pi^{-1}(\tilde{x})$ est analytiquement isomorphe à une couronne ouverte. En outre :*

- (a) si \tilde{x} appartient à une seule composante \tilde{X}_i , alors $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})} = \pi^{-1}(\tilde{x}) \cup \{x_i\}$ est obtenue en identifiant les deux bouts de la couronne ;
- (b) si \tilde{x} appartient à deux composantes \tilde{X}_i et \tilde{X}_j , alors $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})} = \pi^{-1}(\tilde{x}) \cup \{x_i, x_j\}$.

Démonstration. La partie (i) est tout simplement la deuxième partie de 4.4. Pour le reste, il suffit d'appliquer 4.13 et de remarquer que $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})} \subset \pi^{-1}(\tilde{x}) \cup \{x_i \text{ t.q. } \tilde{x} \in \tilde{X}_i\}$ parce que ce dernier ensemble est fermé, son complémentaire étant image réciproque du fermé réunion des autres composantes et des points fermés différents de \tilde{x} .

Or, si \tilde{x} est non singulier $\pi^{-1}(\tilde{x})$ est isomorphe à la boule $E(0, 1)^-$ pour la proposition précédente, donc on obtient sa clôture en rajoutant un point (car $\overline{E(0, 1)^-} = E(0, 1)^- \cup \{\eta_{Gauss}\}$ il suffit de rajouter au plus un point, et elle même n'est pas déjà fermée parce que pas compacte), qui doit être x_i , d'où (ii). Les points fermés de X_i sont donc en correspondance avec les branches issues de x_i . Vu que la clôture d'une couronne ouverte s'obtient en rajoutant exactement deux points, le même argument (avec un petite astuce technique pour montrer qu'on n'obtient pas l'adhérence si on rajoute un seul point) nous donne (iii). \square

Supposons de plus que la réduction de X ait un nombre dénombrable de composantes. On peut maintenant définir le *squelette analytique* de X . C'est un graphe (éventuellement infini) qui se plonge dans X et qu'on note $\Delta(X)$: ses sommets sont les x_i et il y a un arête entre x_i et x_j (pas forcément $i \neq j$) si et seulement si les deux composantes \tilde{X}_i et \tilde{X}_j se coupent en un point double, cet arête est l'unique chemin en X qui relie les deux bouts de la couronne correspondante. C'est bien de remarquer que par construction $\Delta(X)$ est isomorphe au graphe d'incidence de la réduction semi-stable \tilde{X} .

On a donc maintenant assez d'information, grâce a cette proposition et au théorème de réduction semi-stable, pour reconstruire la structure de la courbe analytique X de départ.

On a déjà dit que la droite projective est contractile ; on cherche pour toute courbe k -analytique X un rétract de déformation fort qui ait une structure plus simple que X pour pouvoir étudier ses propriétés topologiques. La courbe X est réunion des images réciproques $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})}$, pour $\tilde{x} \in \tilde{X}$; si \tilde{x} est non singulier on peut rétracter $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})}$ sur $\{x_i\}$. Si par contre \tilde{x} est un point double on peut rétracter la couronne $\overline{\pi^{-1}(\tilde{x})}$ sur le segment reliant ses deux bouts ; les couronnes sont elle-mêmes contractiles, mais en maintenant leurs bouts fixes on peut appliquer toutes ces rétractions au même temps. Autrement dit, le complémentaire $X \setminus \Delta(X)$ est réunion de boules ouvertes, qui peuvent donc se rétracter simultanément chacune sur son bout qui est un point de $\Delta(X)$.

On a donc démontré l'important résultat suivant :

Théorème 4.15 (Type d'homotopie de courbes). *Soit X une courbe k -analytique lisse avec un recouvrement formel distingué \mathcal{U} tel que la réduction $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$ soit semi-stable. Alors le squelette analytique $\Delta(X)$ de X est un rétract de déformation fort de X .*

Vu que comme l'on a dit le squelette analytique de X est isomorphe au graphe d'incidence de sa réduction, on a en particulier le résultat suivant :

Corollaire 4.16. *Toute courbe k -analytique lisse X a le même type d'homotopie que le graphe d'incidence de sa réduction semi-stable.*

Vu que la squelette analytique de X est localement contractile, on démontre aussi, en prenant la normalisation pour se ramener au cas d'une courbe lisse et modulo quelques détails techniques, un résultat important sur la structure locale des courbes analytiques :

Corollaire 4.17. *Toute courbe k -analytique est localement contractile.*

Remarque 4.18. Si le corps de base k n'est pas algébriquement clos, il y a des problèmes techniques supplémentaires. Soit donc X une courbe k -analytique lisse avec k corps non archimédien complet quelconque, pour exemple $k = \mathbb{Q}_p$. D'abord, pour avoir un résultat comme la proposition 4.14 il nous faut une extension finie et séparable $K|k$ des scalaires avant d'avoir une réduction semi-stable. On peut donc définir le squelette analytique $\Delta(X)$ de X comme le quotient $\Delta(X \otimes_k K)/Gal(K|k)$; c'est encore un graphe et on peut montrer qu'il ne dépend pas ni de l'extension choisie. On démontre alors que $\Delta(X)$ est rétract de déformation fort de X . Bien-sûr le squelette $\Delta(X)$ n'est pas en général isomorphe au graphe d'incidence de la réduction semi-stable $\widetilde{X \otimes_k K}$, il faut comprendre l'action du groupe de Galois sur le graphe d'incidence.

On démontre que toute courbe k -analytique est localement contractile.

4.4 Courbes à bonne réduction et courbes elliptiques

Déjà dans des cas très simples le théorème qu'on vient de démontrer nous donne des résultats intéressants.

Cas des courbes ayant bonne réduction. Si X est une courbe k -analytique qui admet bonne réduction (i.e. elle admet une réduction irréductible et lisse), le graphe d'incidence est formé d'un seul sommet et aucun arête, donc la courbe analytique X est contractile.

Cas des courbes elliptiques. Il faut encore une fois distinguer entre courbes ayant bonne réduction et courbes de Tate. Pour les premières on tombe dans le cas précédente ; le cas de mauvaise réduction, celui des courbes de Tate, est plus intéressant. Soit X une courbe de Tate analytique sur un

corps k algébriquement clos. Elle admet une réduction semi-stable qui est une courbe irréductible avec un point double, le graphe d'incidence est donc formé d'un seul sommet avec un arête qui forme un boucle ; X a alors le type d'homotopie d'un cercle. On peut donc, grâce au théorème 4.15, retrouver facilement le résultat de 3.10.

On remarque que maintenant on peut étudier aussi ce qui se passe si le corps k n'est pas algébriquement clos. Pour avoir réduction semi-stable il nous faut une extension finie et séparable des scalaires $K|k$, après laquelle la courbe à mauvaise réduction a l'homotopie d'un cercle. Si $E \otimes_k K$ se rétracte sur sa squelette $\Delta(E \otimes_k K)$ qui est un cercle, qu'est-ce qu'on peut dire de E ? Elle se rétracte sur sa squelette $\Delta(E) = \Delta(E \otimes_k K)/Gal(K|k)$. Il peut arriver que l'action du groupe de Galois force le squelette à devenir contractile, par exemple faisant du cercle un segment.

On appelle *courbes de Tate potentielles* ces courbes qui deviennent courbes de Tate seulement après une extension des scalaires, Elles peuvent être homotopes à un cercle ou contractiles, on donne des esquisses d'exemples des deux situations.

Exemple 4.19. L'analytifié X de la courbe elliptique définie sur \mathbb{Q}_3 par l'équation

$$Y^2 = X(X - 3)(X - 1)$$

est une courbe de Tate potentielle.

En effet en travaillant dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^3$ avec variables homogènes X, Y, Z, S on peut considérer le schéma défini par les équations

$$\begin{cases} XY = 3Z^2 \\ S^2 = (X - Z)(Z - Y) \end{cases}$$

On vérifie que c'est bien un modèle : sa fibre générique est (après un changement de variables) la courbe de départ. Sa fibre spéciale est réunion de deux courbes, une d'équations $X = 0$ et $S^2 = -Z(Z - Y)$, l'autre d'équations $Y = 0$ et $S^2 = Z(X - Z)$. L'intersection de ces deux courbes (qui sont par ailleurs isomorphes toutes deux à $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^1$ puisque ce sont des coniques et qu'elles ont un point rationnel) est un point fermé P de corps résiduel $\mathbb{F}_3(i)$, donc la réduction n'est pas déployée : X n'est pas une courbe de Tate. On peut montrer que X n'est pas isomorphe à un tore analytique sur \mathbb{Q}_3 , mais tout rentre dans l'ordre lorsque on monte sur $\mathbb{Q}_3(i)$ car l'intersection des composantes de la réduction va être définie sur le nouveau corps résiduel $\mathbb{F}_3(i)$.

En analysant l'action du groupe de $Gal(\mathbb{Q}_3(i)|\mathbb{Q}_3)$, on peut montrer que X est contractile.

Exemple 4.20. Comme l'on disait, on peut aussi avoir des courbes de Tate potentielles qui ne sont encore courbes de Tate mais ayant déjà le type d'homotopie d'un cercle. Sans entrer dans les détails, on donne seulement une

idée d'une construction possible. Soit Y une courbe de Tate sur k et soit $L|k$ une extension cyclique de corps. On peut fabriquer une courbe k -analytique X sans k -points (donc elle n'est pas une courbe de Tate) mais qui sur L est isomorphe à la courbe de Tate $Y \otimes_k L$ et telle que le groupe cyclique $Gal(L|k)$ agit sur le squelette de $X \otimes_k L$ (qui est un cercle) par rotation, sans point fixe, de façon telle que le squelette de X est lui-même un cercle.

5 Modèles des courbes

Dans ce dernière chapitre on va raconter comme on peut interpréter dans le langage de la théorie de Berkovich différentes propriétés des modèles de courbes algébriques. Cet approche, très géométrique, conduit aussi vers une démonstration du théorème de réduction semi-stable par des méthodes de géométrie de Berkovich. La preuve, qu'on se limite ici à raconter évitant les parties techniques, est objet d'un travail en cours de Antoine Ducros, [Duc].

Dans tout le chapitre, le corps de base k est encore une fois algébriquement clos. Cette hypothèse n'est pas vraiment nécessaire, mais elle nous permet de nous débarrasser de beaucoup de complications qui souvent sont seulement techniques. Les résultats de ce chapitre restent vrais sur un corps non archimédien quelconque, si on rajoute les conditions nécessaires (souvent une extension finie des scalaires) et beaucoup de travail technique.

5.1 Modèles et ensembles finis de point de *type (2)*

Soit X une courbe analytique irréductible compacte sur k , par exemple l'analytifié d'une courbe algébrique projective, connexe et lisse sur k . Dans la suite on va s'occuper toujours de ce dernier cas.

On a déjà vu que à tout modèle formel \mathcal{X} de X on associe l'ensemble fini et non vide des antécédents des point génériques de ces composantes, qui est un ensemble fini de points de *type (2)* de X qui on peut noter $V(\mathcal{X})$.

Ce qui est très intéressant est qu'on a une sorte de réciproque :

Théorème 5.1. *Si X est une courbe analytique irréductible compacte sur k , l'application :*

$$\mathcal{X} \longmapsto V(\mathcal{X})$$

*induit une bijection entre les modèles formels de X plats, topologiquement de présentation finie et avec fibre spéciale réduite, modulo isomorphismes de modèles, et les ensembles finis et non vides de points de *type (2)* de X .*

On note alors $\mathcal{X}(S)$ le modèle associé au ensemble fini non vide S de points de *type (2)*. On rappelle que un isomorphisme de modèles de X entre \mathcal{X} et \mathcal{X}' est le donné d'un isomorphisme de schémas formels $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ tel que la diagramme suivante commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{X}_\eta \\ \parallel & & \downarrow \varphi_\eta \\ X & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{X}'_\eta \end{array}$$

où les applications verticales sont les isomorphismes donnés avec le modèles.

Puisque φ est un isomorphisme, elle induit une bijection entre les ensembles des points génériques de \mathcal{X}_s et de \mathcal{X}'_s , donc c'est évident que à deux modèles isomorphes on associe le même ensemble de points de *type (2)*.

Dans le reste du paragraphe, on explique le principe de la preuve dans le cas projectif.

La partie la plus difficile à démontrer est la surjectivité, i.e. la construction du modèle $\mathcal{X}(S)$ ayant comme images réciproques des points génériques par la réduction l'ensemble S donné. On commence par un lemme :

Lemme 5.2. *Si U est une réunion finie et non vide de composantes connexes de $X \setminus S$, alors $X \setminus U$ est un domaine strictement affinoïde de X .*

Pour démontrer ce lemme on suppose d'abord que U est une composante connexe de $X \setminus S$, on construit alors, grâce au théorème de Riemann-Roch, une fonction analytique f convenable, telle que $X \setminus U$ soit décrit par une condition de la forme $|f| \leq 1$. Ce n'est pas toujours possible, mais on se ramène au cas où ça l'est (la condition étant locale, on peut considérer une courbe globalement plus simple, obtenue en "coupant" X et puis prolongeant les nouveaux morceaux avec un procédé de "chirurgie"). Une intersection d'affinoïdes est affinoïde donc ça reste vrai pour une réunion finie de composantes connexes de $X \setminus S$.

Maintenant on peut construire le recouvrement affinoïde qui nous donne le modèle qu'on voulait. Soit \mathcal{V} la famille des parties compactes de X de la forme $X \setminus U$, avec U une réunion finie de composantes connexes de $X \setminus S$ telle que le bord ∂U de U dans X est contenu dans S et $S \setminus \partial U \subset U$. Alors \mathcal{V} est un recouvrement affinoïde de X pour le lemme précédent.

Pour montrer qu'il s'agit bien d'un recouvrement formel, on ouvre une petite parenthèse à propos de ces derniers :

Lemme 5.3. *Soit X une courbe k -affinoïde avec un atlas formel qui induit une réduction \tilde{X} , et S l'ensemble des antécédents par la réduction des points génériques des composantes irréductibles. Soit W un compact de X . Alors W est un domaine affinoïde formel de X si et seulement si il existe un sous-ensemble S' de S et un ensemble Π de composantes connexes de $X \setminus S$ tels que :*

- (i) $W = S' \cup \bigcup_{V \in \Pi} V$;
- (ii) pour tout $V \in \Pi$ l'on a $\partial V \setminus S'$;
- (ii) presque toutes les composantes connexes de $X \setminus S$ de bord contenu dans S' appartiennent à Π .

Démonstration. Le compact W est un domaine affinoïde formel de X si et seulement si il est l'image réciproque par la réduction d'un ouvert de Zariski de \tilde{X} . Mais un ouvert de Zariski de X est une réunion de composantes

irréductibles de X d'où on enlève au plus un nombre fini de points fermés. Le résultat suit maintenant en rappelant la relation entre composantes connexes de $X \setminus S$ et points fermés de \tilde{X} . \square

Or, si U et V sont deux éléments de \mathcal{V} , on peut appliquer le lemme à $X = U$ et $W = U \cap V$ pour en déduire que $U \cap V$ est formel dans U , et donc que \mathcal{V} est un recouvrement formel. Il suit aussi facilement que S est l'image réciproque par la réduction des points génériques des composantes irréductibles du modèle correspondant, parce que cette dernière doit être la réunion des bords des domaines affinoïdes formels. Grâce à la caractérisation du lemme on montre aussi que si \mathcal{X}' est un modèle quelconque avec $V(\mathcal{X}') = S$ alors tout domaine affinoïde formel qui vient de \mathcal{X}' est lui-même un élément de \mathcal{V} , et donc l'application $\mathcal{X} \mapsto V(\mathcal{X})$ est injective.

Comme l'application de réduction est anticontinue, l'image réciproque $\pi^{-1}(x)$ d'un point fermé x de la réduction $\mathcal{X}(S)_s$ est ouverte. Puisque $X \setminus S$ est la réunion disjointe des tous ces ouverts, une telle fibre $\pi^{-1}(x)$ est alors une réunion de composantes connexes de $\mathcal{X} \setminus S$. En fait, encore dans [BL85] on démontre même que une telle fibre $\pi^{-1}(x)$ est une composante connexe de $X \setminus S$.

Remarque 5.4. On pourrait étendre le théorème 5.1 à toute courbe irréductible, pas forcément projective. Ce qui se passe alors est que en général ses réductions n'ont pas plus forcément un nombre fini de composantes irréductibles. On obtient une bijection entre les modèles formels de X plats, localement topologiquement de présentation finie et avec fibre spéciale réduite et les ensembles de points de *type (2)* $S \subset X$ non vides, fermés, discrètes et tels que toute composante connexe de $X \setminus S$ soit relativement compacte.

5.2 Caractérisation des modèles semi-stables

Dans ce paragraphe on veut caractériser les modèles semi-stables parmi tous les modèles de X . On a vu dans le chapitre précédente qu'à un modèle semi-stable \mathcal{X} on associe le squelette analytique $\Delta(\mathcal{X})$, un graphe qui vit dans X dont l'ensemble des sommets V est l'ensemble des antécédents des points génériques de la réduction \mathcal{X}_s . On a dit tout à l'heure que \mathcal{X} est égal à $\mathcal{X}(V)$, et donc $\Delta(\mathcal{X})$ est égal à $\Delta(\mathcal{X}(V))$. Par simplifier la notation on note cet graphe aussi $\Delta(S)$. On voudrais pouvoir dire si le modèle $\mathcal{X}(S)$ est semi-stable simplement en regardant S . En effet on se rends compte facilement que on ne peut pas avoir dans X un tel graphe dont l'ensemble des sommets est exactement S pour un S quelconque, donc on peut bien s'attendre au moins de pouvoir exclure des cas de "mauvais S ".

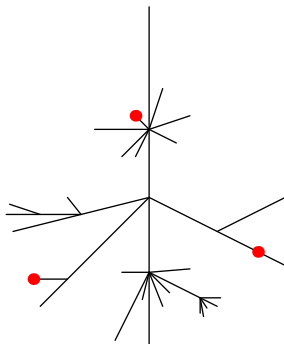
En fait, on peut faire plus et caractériser entièrement les modèles semi-stables. La caractérisation que l'on obtient est très simple et agréable :

Lemme 5.5. *Soit X une courbe analytique irréductible et connexe, et soit S un ensemble fini de points de type (2) de X . Le modèle $\mathcal{X}(S)$ associé à l'ensemble de points S est semi-stable si et seulement si toute composante connexe de $X \setminus S$ est un disque ou une couronne.*

Démonstration. C'est conséquence immédiate de la proposition 4.13. En effet, on vient de montrer que les fibres des points fermés de la réduction \mathcal{X}_s par l'application de réduction coïncident avec les composantes connexes de $X \setminus S$, et ces fibres sont par 4.13 des disques exactement au dessus des points lisses, et de couronnes exactement au dessus des points doubles. \square

Il faut remarquer que de toute façon presque toutes ces composantes sont des disques, vu que tout point de la réduction sauf au plus un nombre fini est lisse.

Pour exemple, les trois points marqués dans la figure suivante ne donnent pas un modèle semi-stable de $\mathbb{P}_k^{1,an}$:



On voit en effet qu'ils ne peuvent pas être les sommets d'un graphe, ce qui est cohérent avec le fait que la composante "entre les trois" n'est ni un disque ni une couronne, car elle a trois bouts.

5.3 Existence d'un modèle semi-stable

Cette approche peut donner une nouvelle preuve du théorème de réduction semi-stable entièrement dans la théorie de Berkovich, différente des preuves de Deligne et Mumford et de Bosch et Lütkebohmert.

Grâce à 5.5, pour avoir un modèle semi-stable de X il nous suffit de démontrer l'existence de un ensemble fini et non vide S de points de *type (2)* de X convenable, i.e. tel que toute composante connexe de $X \setminus S$ soit un disque ou une couronne.

Notons que par ce qu'on a remarqué en 3.2, une condition nécessaire pour que le modèle $\mathcal{X}(S)$ soit semi-stable est que S contienne tout point de X de genre strictement positif, car un tel point ne peut pas être contenu dans

un disque ni dans une couronne. Malheureusement cette condition ne peut absolument pas être suffisante, un contre-exemple facile étant une courbe avec trois points de genre strictement positif disposés comme dans le dernier dessin. Dans ce cas spécifique, pour obtenir un modèle semi-stable on doit au moins rajouter aussi le point “central”, i.e. l’unique point x tel que aucune composante connexe de $X \setminus \{x\}$ contient deux points de genre positif. Ce que le point x a en commun avec les points de genre positif est qu’il n’a aucun voisinage isomorphe à un disque ou à une couronne ; et on verra plus tard que cette propriété est très importante.

Démontrer l’existence d’un tel ensemble S dans X est une des parties les plus compliquées de cette nouvelle preuve du théorème de réduction semi-stable. Pour le faire on doit d’abord faire une étude locale de X . Si $x \in X$ est un point quelconque, on démontre, en utilisant encore de techniques de “chirurgie”, le théorème de Riemann-Roch et beaucoup d’autres outils, le fait suivant :

- si x est de *type (1)* ou *(4)*, il a une base de voisinages qui sont des disques ;
- si x est de *type (2)*, il a une base de voisinages V tels que un nombre fini des composantes connexes de $V \setminus \{x\}$ sont des couronnes et les autres sont des disques ;
- si x est de *type (3)* il a une base de voisinages qui sont des couronnes.

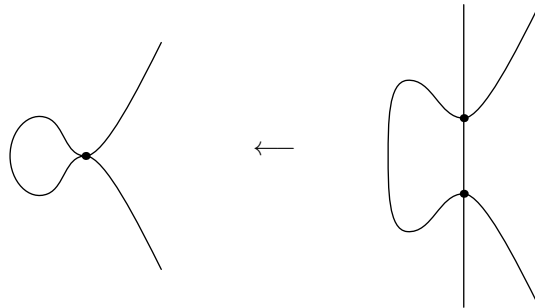
En “recollant” toutes ces informations on peut trouver l’ensemble S qu’on cherche.

5.4 De semi-stable à stable

Trouver parmi les modèles semi-stables un modèle qui soit aussi stable est une question un peu plus délicate, mais on peut l’obtenir en raisonnant encore sur la géométrie de la courbe analytique, comme on va faire tout de suite.

Classiquement en partant d’un modèle $\mathcal{X} = \mathcal{X}(S)$ semi-stable de X on en obtient un nouveau $\mathcal{X}' = \mathcal{X}(S')$ en éclatant le premier le long d’un point fermé x de sa fibre spéciale \mathcal{X}_s . La courbe \mathcal{X}'_s a une composante en plus que \mathcal{X} , et au niveau des graphes associés ça signifie que $\Delta(S')$ a un sommet en plus que $\Delta(S)$. Ce nouveau sommet est un point de X qui se trouve sur la composante connexe $\pi^{-1}(x)$ de $X \setminus S$. Il y a deux cas, selon qu’on éclate un point lisse ou bien un point singulier, qu’on décrit bien avec de dessins.

D'abord, si on éclate un point singulier :

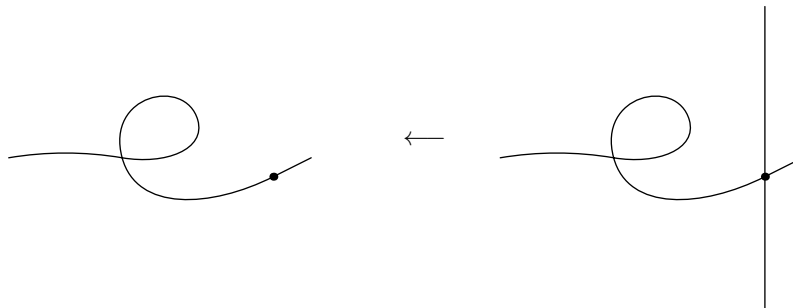


voici les deux graphes d'incidence correspondants :



Le nouveau sommet coupe en deux arêtes le boucle du premier graphe correspondant au point double.

Ici par contre on éclate un point lisse :



voici les graphes d'incidence correspondants (il faut faire attention, celle qu'on obtient en éclatant un point lisse n'est plus une courbe semi-stable, mais on parle quand-même de son graphe d'incidence avec un abus de notation) :



Le nouveau sommet est un nouveau point, et il y a un arête qui le relie au point qui correspond à la composant de départ.

Inversement, on se rapproche d'un modèle stable en contractant une composante irréductible de \mathcal{X}_s qui est isomorphe à \mathbb{P}_k^1 et coupe les autres composantes en un ou deux points. Un sommet du graphe $\Delta(\mathcal{X})$ correspond à une composante isomorphe à \mathbb{P}_k^1 si et seulement s'il est de genre 0 et il n'a pas de cycle (ce qui signifie qu'il correspond à une composante lisse); de plus cette composante coupe les autres en au plus deux points si du sommet correspondante partent au plus deux arêtes. On appelle un sommet avec ces propriétés *sommet exceptionnel* du graphe. L'effet d'une contraction est donc d'effacer du graphe $\Delta(\mathcal{X})$ un sommet exceptionnel, le contraire de ce qui se passe si on fait un éclatement; ; c'est à dire, renverser les flèches dans le dessin précédent.

On voit aussitôt que le modèle semi-stable \mathcal{X} est stable si le graphe $\Delta(\mathcal{X})$ n'a pas de sommets exceptionnels. Ce qu'on veut savoir c'est si chaque fois qu'on trouve un sommet exceptionnel dans le graphe associé à un modèle semi-stable de X on peut l'enlever et obtenir un autre modèle semi-stable. Ici, on ne s'occupe plus des contractions; on se demande tout simplement si le modèle associé au nouveau ensemble fini de sommets nous donne encore un modèle semi-stable. La réponse est affirmative; et une fois traduite la question, en regardant ce qui se passe au niveau du graphe vu comme squelette dans la courbe de Berkovich, est donnée par le lemme suivante :

Lemme 5.6 (Lemme de fusion). *Soit X une courbe k -analytique connexe et lisse.*

- (i) *S'il existe un point $x \in X$ de type (2) avec $g(x) = 0$ et tel que $X \setminus \{x\}$ soit réunion disjointe de deux couronnes et de disques, alors X est une couronne.*
- (ii) *Si $X = U \cup V$, où V est une couronne ouverte, U est un disque ouvert qui rencontre le squelette de V , et ∂V n'est pas contenu dans U , alors X est un disque.*

Le principe de la preuve du lemme est en tous deux les cas le suivant. On plonge convenablement X dans une courbe projective \mathcal{Y} et on démontre que le premier groupe de cohomologie étale (avec coefficients dans un groupe convenable) de \mathcal{Y} est trivial, en utilisant les calculs des H_{et}^1 des disques et des couronnes. Il en suit que $\mathcal{Y} \cong \mathbb{P}_k^{1,an}$. Dès qu'on a plongé X dans la droite projective, montrer qu'il est un disque ou une couronne n'est pas trop difficile en étudiant ses bouts.

Partant d'un modèle semi-stable \mathcal{X} on peut donc appliquer plusieurs fois ce lemme pour simplifier le graphe $\Delta(\mathcal{X})$ enlevant un à un tous les sommets exceptionnels (ou tous sauf au plus un à la fin, s'il n'y a pas d'autres points) restant toujours avec des modèles semi-stables. On obtient ainsi un modèle stable de X .

Remarque 5.7. Grâce aux théorèmes de type GAGA on obtient le théorème de réduction semi-stable classique, celui établi par Deligne et Mumford pour les courbes algébriques. Il suffit, en partant d'une courbe algébrique lisse, géométriquement connexe et projective, l'analytifier, appliquer le théorème de réduction semi-stable analytique et enfin algébriser le modèle qu'on obtient.

5.5 Canonicité d'un modèle stable

On vient de voir comment, quel que soit le genre de X , en partant d'un modèle semi-stable on peut obtenir un modèle stable enlevant les sommets exceptionnels. Malheureusement on ne peut pas faire toujours ça d'une façon canonique, il faut parfois choisir arbitrairement un sommet exceptionnel à effacer. Par exemple, on voit facilement qu'on obtient un modèle semi-stable de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ en choisissant deux points de *type (2)* quelconques x et y . Or, on peut choisir d'appliquer le premier lemme de fusion pour enlever x , ou de le faire pour enlever y . Dans les deux cas on obtient ainsi un modèle minimal de $\mathbb{P}_k^{1,an}$.

Chaque choix d'un point de *type (2)* de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ nous donne donc un modèle stable, et deux tels schémas formels ne sont bien-sûr pas isomorphes comme modèles de X . Si $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\{x\})$ et $\mathcal{X}' = \mathcal{X}(\{x'\})$ sont deux modèles différents (i.e. $x \neq x'$), on passe de \mathcal{X} à \mathcal{X}' par un éclatement suivi d'une contraction. Précisément, on éclate le point $\pi(x')$ et puis on contracte la composante originaire $\overline{\{\eta\}}$.

Remarque 5.8. Dans le cas de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ c'est facile de voir explicitement le modèle associé à un point de *type (2)*, et comment on passe d'un modèle à un autre. Si on considère la réduction de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ qu'on obtient en considérant le recouvrement formel $\{\{|T| \leq 1\}, \{|T| \geq 1\}\}$, l'unique antécédent du point générique de \mathbb{P}_k^1 est alors le point de Gauss η_1 . Si on prend le recouvrement $\{\{|T - a| \leq \epsilon\}, \{|T - a| \geq \epsilon\}\}$ le point est $\eta_{a,\epsilon}$; on passe d'un modèle à l'autre par un changement des coordonnées.

Le modèle avec sommets les deux points η_1 et η_ϵ , qui n'est bien sûr pas stable, est celui avec recouvrement formel $\{\{|T| \leq \epsilon\}, \{\epsilon \leq |T| \leq 1\}, \{|T| \geq 1\}\}$ et il est défini par une équation en deux variables $ST = a$, où a est un élément de k avec $|a| = \epsilon$.

On peut aussi considérer une courbe de Tate X . Dans X il n'y a pas des points de genre positif, on a vu par contre que sa réduction a le type d'homotopie d'un cercle. La courbe se rétracte sur ce cercle, son squelette analytique, et on verra plus tard que ce cercle ne dépend pas du modèle semi-stable choisi. Un modèle stable de X s'obtient en choisissant un point de *type (2)* sur ce cercle; et comme dans le cas de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ deux choix différents donnent deux modèles stables différents. On passe d'un modèle à l'autre par

un éclatement suivi d'une contraction. Vu comme sous-ensemble de X , le graphe associé reste toujours le même cercle, mais il a comme sommet le point choisi. Même si le squelette est globalement canonique, il n'existe pas *a priori* de moyen de choisir un point particulier sur celui-ci, donc on n'a pas un modèle stable canonique.

Heureusement ce sont les deux seuls cas où ça peut se passer mal. En fait, si dans l'ensemble S des points choisis il y a des points de genre supérieur ou égal à 1, l'ensemble de ces points nous permet de trouver un modèle stable, qui est en effet l'unique modèle stable qui puisse s'obtenir à partir de ces points par éclatements et contractions.

Or, la formule 2 nous assure que si $g \geq 2$ et tous les points de S sont de genre 0, le nombre de Betti du graphe $\Delta(S)$ est au moins 2. Ceci nous permet de choisir de façon canonique des point du squelette. On commence par considérer la partie de X suivante :

$$\Gamma = \{x \in X \text{ tels que } x \text{ n'a pas de voisinage dans } X \text{ isomorphe à un disque}\}.$$

C'est un fermé connexe de la courbe X , rétracte par déformation forte de X , car son complémentaire est réunion de disques ouverts ; c'est un ensemble de points de *type (2)* et *(3)*, parce que on démontre que les point de *type (1)* ou *(4)* ont toujours un voisinage isomorphe à un disque, et comme on a vu il contient tout point de genre strictement positif. Si $x \in \Gamma$, on note $N(x)$ le nombre de branches de Γ qui partent de x (i.e. le nombre des composantes connexes de $(\Gamma \setminus \{x\}) \cap U$ pour tout voisinage assez petit U de x). On peut toujours décrire Γ explicitement :

Lemme 5.9. *Soit Γ le sous-ensemble de X défini comme ci-dessus. Alors :*

- si $X = \mathbb{P}_k^{1,an}$, Γ est vide ;
- si X est une courbe de Tate, Γ est non vide et égal à un cercle ;
- dans tout autre cas, Γ s'identifie avec un graphe fini dans X , ayant pour sommets les éléments de l'ensemble suivant :

$$S = \{x \in \Gamma \text{ t.q } g(x) \geq 1 \text{ ou } N(x) \geq 3\},$$

qui est un ensemble fini et non vide de points de type (2).

Démonstration. Dans $\mathbb{P}_k^{1,an}$ tout point a un voisinage isomorphe à un disque, donc Γ est vide. Pour une courbe de Tate X on voit que Γ est égal à $\Delta(X)$, qui est un cercle. Finalement, si X n'est isomorphe ni à $\mathbb{P}_k^{1,an}$ ni à une courbe de Tate alors S est non vide par la formule du genre 2 : lorsque le nombre de Betti de X est au moins 2 il y a dans Γ deux cercles donc un segment qui le relie donc un point d'où partent au moins trois arêtes. On démontre que un point $x \in X$ de *type (3)* a un voisinage isomorphe à une couronne, à x aboutissent alors deux branches. Il en suit que S est un ensemble de points de *type (2)* de X . C'est maintenant clair que Γ est un graphe fini dont l'ensemble des sommets est S . \square

Le cas que nous intéressent maintenant est le troisième, parce que le modèle associé à S est le modèle stable.

Proposition 5.10. *Soit X une courbe k -analytique lisse, connexe et projective non isomorphe à $\mathbb{P}_k^{1,an}$ ni à une courbe de Tate. Soit S l'ensemble défini comme ci-dessus. Le modèle de X associé à S est l'unique modèle stable.*

Démonstration. La semi-stabilité du modèle $\mathcal{X}(S)$ est conséquence des lemmes de fusion 5.6. De plus, parmi les éléments de S il n'y a pas de sommets exceptionnels, donc $\mathcal{X}(S)$ est un modèle stable.

Maintenant, soit $\mathcal{X}(S')$ un modèle semi-stable de X . Pour terminer la démonstration il suffit de prouver que S' contient S . Mais on a déjà dit que S' doit contenir tout point de genre strictement positif, et il doit contenir aussi les autres points de S pour pouvoir satisfaire la dernière propriété des courbes stables, donc $S \subset S'$. \square

Points marqués. On a vu donc que il n'y a pas de modèle stable canonique pour $\mathbb{P}_k^{1,an}$ et pour une courbe de Tate, et que il faudrait en effet dans les deux cas choisir un point de *type (2)* pour avoir un modèle stable. Ce qui est intéressant et cohérent avec les résultats classiques, c'est que le fait de marquer certains points rigides peut permettre d'obtenir un modèle stable.

Soit E un ensemble fini de k -points de X . On définit $\mathcal{X}(E)$ comme l'ensemble des modèles semi-stables dont l'ensemble des sommets S est tel que pour tout $x \in E$ la composante connexe de $X \setminus S$ qui contient x est un disque et ne contient pas d'autres éléments de E . L'ensemble $\mathcal{X}(E)$ est alors non vide, et lorsque X n'est $\mathbb{P}_k^{1,an}$ ni une courbe de Tate, ou $X \cong \mathbb{P}_k^{1,an}$ et $\#(E) \geq 3$, ou X est une courbe de Tate et $\#(E) \geq 1$, $\mathcal{X}(E)$ contient toujours un unique élément minimal (qui n'est pas en général un modèle stable).

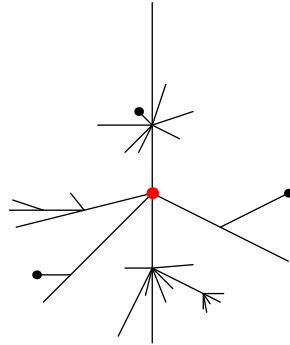
Ce qui est très intéressant est que cet unique modèle minimal est stable si $X \cong \mathbb{P}_k^{1,an}$ et $\#(E) = 3$, ou si X est une courbe de Tate et $\#(E) = 1$:

Proposition 5.11. – *Lorsque on marque trois différents k -points de $X = \mathbb{P}_k^{1,an}$, on obtient un modèle stable canonique de X .*
– *Lorsque on marque un k -point d'une courbe de Tate X , on obtient un modèle stable canonique de X .*

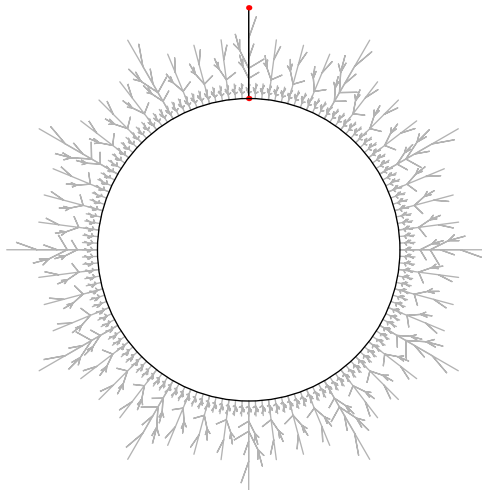
Démonstration. On a déjà dit qu'exactement en ces deux cas on a besoin de choisir un point de *type (2)* pour avoir un modèle stable. Il suffit donc de montrer que lorsque $X = \mathbb{P}_k^{1,an}$ (respectivement lorsque X est une courbe de Tate) si E contient exactement 1 k -point (respectivement 3 k -points différentes) alors l'unique modèle semi-stable minimal dans $\mathcal{X}(E)$ a exactement un sommet. Pour $\mathbb{P}_k^{1,an}$, on doit prendre comme sommet l'unique point tel que aucune composante connexe de son complémentaire ne contienne deux points marqués; de manière équivalente c'est l'unique point de l'enviluppe

connexe des points marqués d'où aboutissent trois segments de cet enveloppe. Pour une courbe de Tate on doit prendre l'unique point du cercle Γ tel que la composante connexe du complémentaire qui contient le point marqué ne contienne d'autres points de Γ . \square

Voici un dessin dans le cas de $\mathbb{P}_k^{1,an}$:



et un dessin dans le cas de la courbe de Tate :



Choisir des k -points est clairement une chose plus naturelle, et ce dernier résultat, qui en algébrisant les modèles peut se lire également par les courbes algébriques avec le langage classique, est bien connu depuis longtemps. Grâce à cette nouvelle interprétation avec la théorie de Berkovich on a trouvé une simple explication géométrique. Bien sûr si on marque plus points que nécessaire on trouve quand même un modèle semi-stable associé, mais celui-ci en général n'est plus stable.

Remarque 5.12. On rappelle qu'une courbe elliptique est une courbe lisse connexe et projective (de genre 1) avec un loi de groupe sur ses points ; elle à donc toujours déjà un point marqué, le point 0. Donc on peut dire que, même si n'est pas vrai que une courbe de Tate (où on oublie sa structure de

groupe) a un modèle semi-stable canonique, dès qu'on considère en fait une courbe elliptique elle gagne automatiquement un modèle canonique.

Références

- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78) :5–161 (1994), 1993.
- [Ber08] Vladimir G. Berkovich. Non-archimedean analytic geometry : first steps. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 1–7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [BGR84] Siegfried Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [BL85] Siegfried Bosch and Werner Lütkebohmert. Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I. *Math. Ann.*, 270(3) :349–379, 1985.
- [Bos08] Siegfried Bosch. Lectures on Formal and Rigid Geometry. 2008.
- [Bou64] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308. Hermann, Paris, 1964.
- [Con08] Brian Conrad. Several approaches to non-Archimedean geometry. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 9–63. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Duc] Antoine Ducros. Triangulations et réduction semi-stable. Travail en cours.
- [Duc07] Antoine Ducros. Espaces analytiques p -adiques au sens de Berkovich. *Astérisque*, (311) :Exp. No. 958, viii, 137–176, 2007. Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006.
- [GSC01] A. Grothendieck, J.P. Serre, and P. Colmez. *Correspondance Grothendieck-Serre*. Societe Mathematique De France, 2001.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [Rob00] Alain M. Robert. *A course in p-adic analysis*, volume 198 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Sil09] J.H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*. Springer Verlag, 2009.